LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Björn 2004-05-11

Övningsprogram i *Spektralteori*, VT 2004

Uppgifter som behandlats:

10 feb	**1.1**:3, 4, 5	**1.2**:2, 3, 4	**1.3**:2	**1.4**:2	
24 feb	**E**1	**1.4**:3, 4, 5	**1.5**:1, 2, 3, 4	**E**3	
2 mar	**1.6**:1, 3, 4, 5, 6, 7	**1.7**:1, 3, 4	**E**4		
16 mar	**1.8**:3	**E**5 **E**6	**1.8**:4	**1.9**:1, 2, 3, 4	**1.11**:1
6 apr	**1.12**:2, 3, 4	**E**7	**2.1**:1, 2, 3, 4, 7	**2.2**:2, 7, 8	
13 apr	**2.3**:1, 2, 3	**E**9	**E**10	**2.4**:1, 2	**E**8
20 apr	**2.4**:3, 6	**E**11	**E**12	**2.5**:1, 2	
4 maj	**2.5**:3	**2.6**:2	**2.7**:2	**2.8**:1	

Följande uppgifter ska bearbetas inför problemseminarierna.

2.8:2, 4, 5
2.9:1, 2
2.10:1
3.2:2, 4
3.3:1, 2 **E**13
3.4:1, 3
E14 **E**15 **E**16 **E**17

Uppgifter som inte finns i boken:

E1. Låt E vara ett Banachrum med dimension minst 2 (den behöver inte vara ändlig). Visa att $\mathcal{B}(E)$ är icke-kommutativ.

E2. Låt E vara ett Hilbertrum och $A \in \mathcal{B}(E)$ vara kompakt. Visa att det finns en följd av operator $A_1, A_2, \dots$, med ändlig rang, så att $\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$. (Detta är omvändningen av **1.4**:2. Att omvändningen inte är sann för Banachrum i allmänhet visades av Per Enflo 1973.)

E3. Låt A vara en Banachalgebra med $\mathbf{1}$ och låt $x, y \in A$.
- (a) Visa att om A är kommutativ och xy är inverterbar så är x och y inverterbara.
- (b) Visa att om $A = M_n(\mathbf{C})$ (se Exempel 1.3.10) och xy är inverterbar så är x och y inverterbara.
- (c) Visa att om både xy och yx är inverterbara så är x och y inverterbara.
- (d) Get ett exempel där xy är inverterbar, men x och y inte är inverterbara.
- (e) Om vi vet att både xy och x är inverterbara, vad kan vi då säga om inverterbarheten av y.

E4. En *Hamelbas* för ett vektorrum V är en mängd vektorer B så att varje ändlig delmängd av B är linjärt oberoende och varje vektor i V kan skrivas som en ändlig linjärkombination av vektorer i B. Visa att varje vektorrum har en Hamelbas.

E5. Låt V vara ett oändligt-dimensionellt vektorrum (d.v.s. V har en Hamelbas med oändligt många vektorer). Ge V två stycken icke-ekvivalenta normer.

E6. Visa att en Hamelbas till ett oändligt-dimensionellt Banachrum inte kan vara uppräknelig. (Ledning: Använd Baires kategorisats.)

E7. Visa att om P är en projektion på ett Hilbertrum (enligt Arvesons definition) så är $\ker P \perp \operatorname{im} P$.

E8. Låt H och K vara Hilbertrum och $W \in \mathcal{B}(H, K)$ vara unitär. Låt vidare $A \in \mathcal{B}(K)$ och $B \in \mathcal{B}(H)$ uppfylla $WB = AW$. Visa att $\sigma(A) = \sigma(B)$ och $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$. Fungerar ditt bevis om H och K är Banachrum?

E9. I kapitel 2.3 används avbildningen : f polynom (på formen (2.5)) i $C(X) \mapsto \{c_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}$. Denna avbildning är inte alltid entydig. Avgör när den omvända avbildningen $\{c_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty} \mapsto f$ är injektiv (uttryckt som ett villkor på X).

E10. Låt $T \in \mathcal{B}(H)$ vara normal, där H är ett Hilbertrum. Avgör när det finns ett nollskilt polynom p i T (enbart i T, inte i både T och T^*) så att $p(T) = 0$. Ange även graden för ett sådant p med minimal grad.

E11. Låt $N \in \mathcal{B}(H)$ vara normal, där H är ett Hilbertrum. Låt $\lambda \in \sigma(N)$ vara isolerad (i $\sigma(N)$). Visa att $\lambda \in \sigma_p(N)$.

E12. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd så att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Låt vidare $Ae_n = a_n e_{n+1}$ som i uppgifterna 1.6.4–7.

(a) Vad är $\sigma(A)$? (Det har vi redan bestämt en gång!)

(b) Beskriv hur $\sigma_p(A)$ beror på $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(c) Jämför resultatet med övning **E**11.

E13. Fortsättning på övning **3.3**:2: Vad händer om $\dim E < \infty$? Formulera och bevisa motsvarande påstående om $\dim E < \infty$. Vad är det i lösningen av övning **3.3**:2 som fallerar när $\dim E < \infty$.

E14. Låt $A \subset B$, $A \neq B$, vara obegränsade operatorer. Visa följande:

(a) Om B är självadjungerad så är A symmetrisk, men inte självadjungerad.

(b) Om A är självadjungerad så är B inte symmetrisk.

E15. Visa att om T är en operator i H så är $\sigma(T)$ sluten. (Ledning: Se ledningen till uppgift 13.17 i Rudin, *Functional Analysis*, 2nd ed.)

E16. Visa att om $F \subset \mathbf{C}$ är sluten (och $\dim H = \infty$) så finns det en normal operator T i H med $\sigma(T) = F$. (Detta är uppgift 13.20 i Rudin, *Functional Analysis*, 2nd ed.)

E17. Lös uppgift 13.19 i Rudin, *Functional Analysis*, 2nd ed. (Den formuleras också på sista föreläsningen.)