## Uppgift : 

a) Skriv om funktionen $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x$ på formen $f(x) = C\sin(x + \alpha)$.
Ange exakt $C$ och $\alpha$. Kontrollera ditt svar.

b) Lös ekvationen $\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 1$.

## Lösning för a):

$$\begin{cases} f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x \\ f(x) = C\sin(x + \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{den andra ekvationen skriver vi} \\ \text{om med additionsformeln för sinus} \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x \\ f(x) = C(\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x \\ f(x) = C\sin x \cos \alpha + C\cos x \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \cdot \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x \\ f(x) = (C\cos \alpha) \cdot \sin x + (C\sin \alpha) \cdot \cos x) \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{funktionerna är identiska om} \\ \text{koefficienterna framför respektive} \\ \text{sinx och cosx är identiska} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 1 = C\cos \alpha \\ \sqrt{3} = C\sin \alpha \end{cases} \quad *$$

Detta * ekvationssystem använder vi till för att få fram $C$ och $\alpha$.

Vi kvadrerar ekvationerna ledvis

$$\begin{cases} 1^2 = (C\cos \alpha)^2 \\ (\sqrt{3}) = (C\sin \alpha)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = C^2 \cos^2 \alpha \longrightarrow \text{ekv.1} \\ 3 = C^2 \sin^2 \alpha \longrightarrow \text{ekv.2} \end{cases}$$

Om ekvationerna adderas ledvis får vi

$$1 + 3 = C^2 \cos^2 \alpha + C^2 \sin^2 \alpha \quad \Leftrightarrow$$
$$4 = C^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \Leftrightarrow [\,\text{i parentesen har du trigonometriska ettan}\,] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4 = C^2 \quad \Leftrightarrow \quad C = \pm 2$, vi väljer $C > 0$, alltså $C = 2$.

Insättning av $C = 2$ i ***** ger $\begin{cases} 1 = 2\cos\alpha \\ \sqrt{3} = 2\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{ty både } \sin\alpha \text{ och } \cos\alpha \text{ antar postiva värden} \\ \text{måste vinkeln } \alpha \text{ ligga i första kvadranten, här kan} \\ \text{du ha nytta av en av vara speciella trianglar för att ta fram vinkeln} \end{array}\right] \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{observera att vi är ute} \\ \text{efter bara } \underline{\underline{\text{en}}} \text{ vinkel som} \\ \text{uppfyller båda ekvationerna} \end{array}\right] \textbf{!!!}$$

**Summa summarum**, för $C = 2$ och $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ kan vi skriva om

$f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x$ på formen $f(x) = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

**Kontroll:**

$$f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos x\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \textit{mha av en liksidig triangel får vi} \\ \textit{att } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \textit{ respektive } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{array}\right] =$$

$$= 2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x\right) = 2\cdot\sin x\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x = \sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x = f(x)$$


**Svar:** För $C = 2$ och $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ kan vi skriva om $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x$ på formen

$f(x) = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

**Lösning för b):**

$$\sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\text{mha av en omskrivning av funktionen i a)}\\ \text{kan vi skriva om vänster led i ekvationen}\end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\text{ ty } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \text{ får vi }\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ \text{eller}\\ \left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi n\end{cases}, \text{där } n\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ \text{eller}\\ \left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}+2\pi n\end{cases}, \text{där } n\in Z \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2\pi n\\ \text{eller}\\ x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2\pi n\end{cases}, \text{där } n\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ \text{eller}\\ x=\frac{3\pi}{6}+2\pi n\end{cases}, \text{där } n\in Z \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ \text{eller}\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n\end{cases}, \text{där } n\in Z$$

**Svar:** $$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ \text{eller}\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n\end{cases}, \text{där } n\in Z$$