Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
726G35 Diskret matematik och logik, 7,5 hp
2022-08-19

---

1. a) Låt $B = \{1, 13\}$. Vilka av påståendena nedan är då sanna respektive falska?
   i. $\emptyset \subseteq B$ är **sant**, eftersom "alla element" i $\emptyset$ finns i B. $\emptyset$ är delmängd till alla mängder.
   ii. $\{1\} \in B$ är **falskt**. 1 är ett element i B, men inte $\{1\}$. (Felaktigt förpackad skulle man kunna säga.)
   iii. $|B| = 14$ är **falskt**. $|B| = 2$, då B innehåller de två elementen 1 och 13.

   b) Gäller $(A \cap B) \setminus C^c = (C \cup A) \cap (B \setminus C)$ för alla mängder A, B och C? Vi ger ett motexempel till denna då den inte gäller för alla mängder.

   Låt $A = \{a\}$, $B = \{a\}$, $C = \{b\}$ och $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$. Vi beräknar VL och HL med dessa mängder insatta:

   VL$= (A \cap B) \setminus C^c = (\{a\} \cap \{a\}) \setminus \{b\}^c = \{a\} \setminus \{a, c\} = \emptyset$.

   HL$= (C \cup A) \cap (B \setminus C) = (\{b\} \cup \{a\}) \cap (\{a\} \setminus \{b\}) = \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$.

   Då VL och HL ger olika mängder i exemplet ovan så gäller inte likheten för alla mängder A, B och C.

Svar: a) i är sann, ii och iii falska. Se motiveringar ovan.
b) Likheten gäller ej. Se motexempel ovan.

2. a) Vi visar att $r \to \neg s \Leftrightarrow \neg(s \wedge r)$ med hjälp av sanningsvärdestabell:

r	s	$\neg s$	$r \to \neg s$	$s \wedge r$	$\neg(s \wedge r)$	$(r \to \neg s) \leftrightarrow \neg(s \wedge r)$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

   Vi ser att sanningsvärdestabellen för $(r \to \neg s) \leftrightarrow \neg(s \wedge r)$ är 1 på alla rader (en tautologi) och därmed är de båda uttrycken $r \to \neg s$ och $\neg(s \wedge r)$ logiskt ekvivalenta, det vill säga $r \to \neg s \Leftrightarrow \neg(s \wedge r)$.

   b) Skriv följande utsaga på satslogisk form:

   "Om solen skiner så badar vi i vattenspridaren. Om vi badar i vattenspridaren så torkar inte gräset. Slutsats: Om solen skiner så torkar inte gräset."

   Vi inför satsparametrarna p: solen skiner, q: vi badar i vattenspridaren, r: gräset torkar. Med dessa satsparametrar blir utsagan ovan som satslogiskt uttryck:

$$(p \to q) \wedge (q \to \neg r) \;\Rightarrow\; p \to \neg r$$

Var god vänd!

c) Vi kan visa att slutledningen ovan är korrekt med sanningsvärdestabell, deduktion eller reduktionsmetoden. Vi väljer att göra det med deduktion. Slutsatsen följer direkt ur syllogismregeln (kedjeregeln):

1.)	$p \to q$	Förutsättning
2.)	$q \to \neg r$	Förutsättning
3.)	$p \to \neg r$	1.), 2.) och Syllogismregeln.

Vi har härlett slutsatsen $p \to \neg r$ ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

(Det kan tyckas motsägelsefullt att gräset inte torkar om solen skiner, men förutsättningen "om solen skiner så badar vi i vattenspridaren" gör ju att gräset inte torkar.)

Svar: a) $r \to \neg s \;\Leftrightarrow\; \neg(s \wedge r)$ gäller, se ovan.
b) Slutledningen på satslogisk form blir: $(p \to q) \wedge (q \to \neg r) \;\Rightarrow\; p \to \neg r$
c) Slutsatsen är korrekt. Se bevis ovan för att slutledningen gäller.

3. I en affär finns fotbollar i fyra olika färger.

a) Då vi köper var sin boll till tre barn i affären och de ska få olika färger på bollarna så kan vi räkna antalet olika sätt genom att första välja färg till det första barnet (4 sätt), sedan till nästa (3 sätt) och sist till tredje barnet (2 sätt). Multiplikationsprincipen ger då: $4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{24}$ olika sätt att fördela bollar med olika färg till de tre barnen.

b) Inför ett läger ska du köpa 7 bollar i samma affär. På hur många olika sätt kan du välja färg på de 7 bollarna bland de fyra färgerna?

Vi kan välja samma färg flera gånger, men ordningen i vilken vi väljer färgerna spelar ingen roll, utan bara vilken kombination vi får (antal bollar av vardera färg), så vi har alltså en kombination med upprepning (staketproblem). Med 4 färger har vi 3 staket och ska välja färg till 7 bollar. Totalt har vi alltså $7+3 = 10$ platser där vi ska välja plats för 3 staket, övriga platser tas av bollarna. Detta ger $\binom{7+3}{3} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{120}$. Det finns alltså 120 olika sätt att välja en färgkombination på de 7 bollarna bland fyra färger.

Svar: a) Finns 24 olika sätt att ge barnen var sin boll där ingen får samma färg.
b) Finns 120 sätt att välja olika färgkombinationer på de 7 bollarna.

4. a) Vi har $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och nedan är relationer på A.

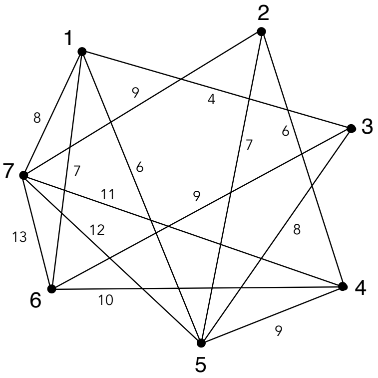
i. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ är också en funktion på A då varje element i A har precis <u>en</u> bild (är relaterad till ett element) i A.

ii. $\{(3, 1), (1, 3), (2, 4)\}$ är ej en funktion på A, då elementet 4 saknar bild i A.

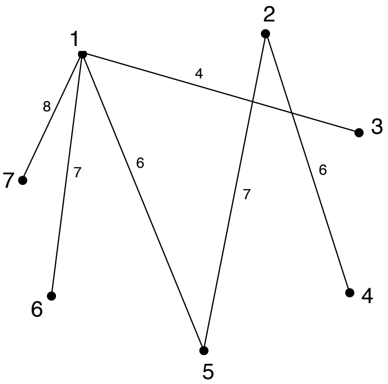
b) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$ är en relation på A.
Denna relation är reflexiv då varje element i A relaterar till sig själva. Alla paren $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$ finns i $\mathcal{R}$. Relationen är ej antisymmetrisk, då både $(3, 4)$ och $(4, 3)$ finns i $\mathcal{R}$. Elementen 3 och 4 har alltså en dubbelriktad pil i relationsgrafen för $\mathcal{R}$, vilket inte får finnas i en antisymmetrisk relation.

Svar: a) i är en funktion, men ii är inte det. Se motivering ovan.
b) Realtionen är reflexiv, en ej antisymmetrisk. Se motiveringar ovan.

5. Enkel och oriktad innebär att ettorna under diagonalen representerar samma bågar som de ovan diagonalen i grannmatrisen. Vi får resultatet som visas i bilden intill där kostnaden anges med mindre siffror på varje båge.



För att ta fram ett billigaste nätverk (minimalt spännande träd) använder vi kruskals algoritm. Med sju noder behöver vi sex bågar enligt satsen för träd. Bågen $\{1, 3\}$ har lägst kostnad (4), så vi väljer den. Vi har två bågar med kostnad 6: $\{1, 5\}$ och $\{2, 4\}$. Båda kan väljas utan att cykel bildas. Sedan har vi två bågar med kostnad 7: $\{1, 6\}$ och $\{2, 5\}$. Även dessa kan väljas utan att cykel bildas. Nu finns det två bågar med kostnad 8: $\{3, 5\}$ och $\{1, 7\}$. $\{3, 5\}$ ger cykel, men inte $\{1, 7\}$ så vi väljer den. Vi har nu sex bågar och är därmed färdiga. Vi får ett träd som visas i figuren intill. Kostnaden för det billigaste spännande trädet blir $4+6+6+7+7+8 = 38$.



Svar: Se graf respektive billigaste spännande träd ovan. Kostnaden är 38.

6. Vi ska bilda fyrbokstaviga följder med bokstäverna i ordet DISKRETARE. Om vi skriver bokstäverna som i figuren intill ser vi att vi har 8 olika bokstäver och dubbla av R och E. Vi delar upp problemet i fyra fall.

1.) Högst en av varje bokstav:

Då det finns 8 att välja bland och fyra platser ger mutliplikationsprincipen att antalet sätt är $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = \mathbf{1680}$.

2.) Två R, högst en av övriga bokstäver:

Vi väljer först plats för R:en bland de fyra platserna, utan inbördes ordning. Det går då att göra på $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ sätt. För de återstående två platserna finns det nu 7 bokstäver att välja på, så dessa kan fyllas på $7 \cdot 6 = 42$ sätt. Totalt fås då $6 \cdot 42 = \mathbf{252}$ olika följder med två R i.

3.) Två E, högst en av de övriga bokstäverna:

Beräkningar blir precis de samma som i fall 2, fast med två E istället för R. Vi har alltså **252** möjligheter även i detta fall.

4.) Två R och två E:

Välj först plats för R:en, kan på samma sätt som i fall 2 göras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. De två återstående platserna tas av E:na, så det kan bara göras på 1 sätt. Vi har alltså totalt $6 \cdot 1 = \mathbf{6}$ sätt med två R och två E.

Var god vänd!

Vi adderar fallen och får sammanlagt $1680 + 252 + 252 + 6 = 2190$ olika fyrbokstaviga följder med bokstäverna i ordet DISKRETARE.

Svar: Det finns 2190 olika fyrbokstaviga följder med bokstäverna i ordet DISKRETARE.

7. Z är mängden av alla heltal och $\mathcal{P}(Z)$ är mängden av alla delmängder till Z. Vi inför relationen $A\mathcal{R}B$ om $A \subseteq B$ på $\mathcal{P}(Z)$, där A och B är godtyckliga element i $\mathcal{P}(Z)$. En relation är en partialordning om den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv. Vi visar att relationen $\mathcal{R}$ är en partialordning genom att visa dessa tre egenskaper.

   En relation är **reflexiv** om varje element är relaterad till sig själv. $\mathcal{R}$ är reflexiv, då varje mängd är en delmängd till sig själv, det vill säga $A \subseteq A$ för alla mängder $A \in \mathcal{P}(Z)$.

   En relation är **antisymmetrisk** om $A\mathcal{R}B$ och $A \neq B$ medför att $B\not\mathcal{R}A$. Om därför $A \subseteq B$ och $A \neq B$, så innebär det att det finns minst ett element i B som inte finns i A. Därmed gäller då att $B \nsubseteq A$. Alltså relaterar B inte till A och givet $\mathcal{R}$ i uppgiften är alltså antisymmetrisk, då detta gäller för alla mängder A, B i $\mathcal{P}(Z)$.

   En relation är **transitiv** om $A\mathcal{R}B$ och $B\mathcal{R}C$ medför att $A\mathcal{R}C$, för alla A, B och C i aktuell mängd. Den givna relationen $\mathcal{R}$ är därmed transitiv, för om $A \subseteq B$ och $B \subseteq C$ så gäller att $A \subseteq B \subseteq C$, det vill säga $A \subseteq C$ för alla A, B och C i $\mathcal{P}(Z)$.

   Då relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{P}(Z)$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv så är den en partialordning.

   Svar: Relation $\mathcal{R}$ på $\mathcal{P}(Z)$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv och därmed en partialordning. Se motiveringar ovan.