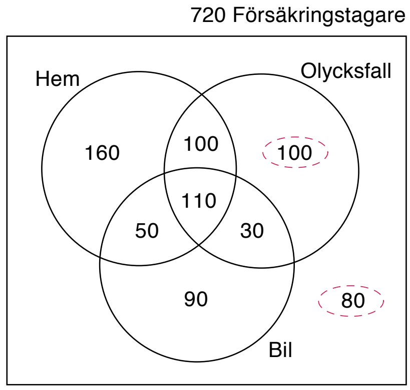
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
726G35 Diskret matematik och logik, 7,5 hp
2023-01-15

---

1. För att strukturera informationen tar vi hjälp av ett venndiagram. Med informationen i uppgiften kan vi successivt, inifrån och ut, räkna ut hur många som finns i varje område. Sist kan vi summera alla vi fått inom cirklarna och se att de är: $160+100+110+50+90+30+100 = 640$ st. Då de är 720 försäkrade kunder totalt så är det alltså $720 - 640 = 80$ stycken utanför de tre cirklarna. Vi får resultatet intill. Nu kan vi besvara frågorna:

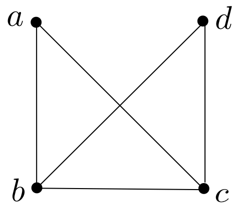


Hur många har endast olycksfallsförsäkring?
Det är alltså de som ligger i cirkeln olycksfall, men inte i någon av de andra cirklarna. Vi ser att det är 100 kunder i figuren (se markering).

Hur många har ingen av de tre försäkringstyperna?
Det är de som är helt utanför cirklarna. Vi ser att det är 80 kunder som inte har någon av de tre försäkringstyperna (se markering).

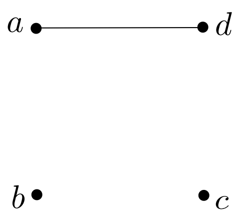
Svar: a) Det är 100 kunder som endast har olycksfallsförsäkring.
b) 80 av de 720 kunderna har ingen av de tre försäkringstyperna.

2. a) Figuren intill visar grafen G. Finns flera hamiltoncykler, till exempel $a-b-d-c-a$.



b) Noderna a och d har grad 2 och noderna b och c har grad 3. Enligt sats finns en sluten eulerväg precis då alla noder har jämnt gradtal och en öppen eulerväg då precis två noder har udda gradtal. Alltså har grafen en öppen eulerväg men inte en sluten, då precis två noder (b och c) har udda gradtal. Ett exempel på en öppen eulerväg är $b-a-c-b-d-c$.

c) Komplementgrafen består av samma noder som finns i G, men med de bågar som inte finns i G. $\overline{G}$ visas i figuren till höger. Denna graf är ej sammanhängande då noderna b och c inte är förbundna med de övriga.



Svar: Grafen har en hamiltoncykel samt en öppen eulerväg, se exempel och motiveringar ovan. Komplementgrafen är ej sammanhängande.

3. a) Vi visar att $\neg(p \wedge q) \vee r \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee (q \rightarrow r)$ med en sanningsvärdestabell.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	VL: $\neg(p \wedge q) \vee r$	$\neg p$	$q \rightarrow r$	HL: $\neg p \vee (q \rightarrow r)$
1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

Då VL och HL har samma sanningsvärde på alla rader så är
$\neg(p \wedge q) \vee r \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee (q \rightarrow r)$.

b) Slutledningen $\neg s \wedge (p \rightarrow s) \wedge (p \rightarrow q) \;\Rightarrow\; \neg q$ är ej korrekt. Om p är falsk, q sann och s falsk så är alla förutsättningar sanna (kontrollera det), men slutsatsen $\neg q$ falsk! Denna uppsättning sanningsvärden utgör alltså ett motexempel som visar att $\neg q$ inte är en korrekt slutsats ur dessa förutsättningar.

Svar: a) Ekvivalens gäller. Se sanningsvärdestabell ovan.
b) Slutledningen är ej korrekt. Se motexempel ovan.

4. a) Från kören Linnea ska man bland 9 deltagare välja ut ett luciatåg bestående av en lucia och fyra tärnor. Om två tärnor byter plats i tåget så betraktar vi inte det som ett nytt luciatåg. Antalet sätt att först välja lucia är 9 st. Sedan kan vi välja fyra tärnor bland 8, utan inbördes ordning, vilket då kan göras på:
$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$ sätt. Totalt får vi då enligt multiplikationsprincipen:
$9 \cdot 70 =$ **630** olika luciatåg.

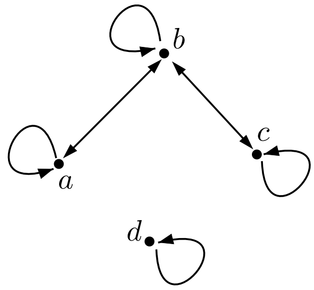
b) Tuva och Stina är två av de 9 deltagarna. Tuva har sagt att om Stina blir lucia vill Tuva inte vara med i luciatåget. På hur många sätt kan luciatåget då utses med hänsyn till detta villkor?

Enklast är att ta samtliga de vi har i a) minus de ”felaktiga”, det vill säga de där Stina är lucia och Tuva är tärna. Det går också att räkna ut genom att dela upp i fallen ”Stina är lucia” respektive ”Stina är inte lucia”.
Vi väljer här att gå på den första idén ovan. Om vi har Stina som lucia och Tuva som en av tärnorna så finns det 7 att välja bland för de återstående tärnorna, vilket ger $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35$ olika luciatåg. Vi drar bort detta antal från totalen och får $630 - 35 = 595$. Det finns **595** luciatåg som tar hänsyn till Tuvas villkor.

Svar: a) Vi kan bilda 630 olika luciatåg bland de 9 personerna.
b) Med Tuvas villkor finns det 595 möjliga luciatåg.

5. Låt $A = \{a, b, c, d\}$ och $B = \{1, 2, 3\}$.

a) Vi ger ett exempel på en relation på A som är reflexiv, symmetrisk, men inte transitiv. Låt $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$.



Denna är reflexiv, då alla element i A är relaterade till sig själva. Relationen är också symmetrisk då alla par också finns i den omvända riktningen. (Bara dubbelriktade pilar i grafen.) Den är inte transitiv då till exempel $a\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}c$, men $a\not\mathcal{R}\, c$. Se relationsgrafen i figuren intill.

b) Det finns funktioner från A till B som är surjektiva, t ex $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$. Den är surjektiv då varje element i B är bild till något element i A.

c) Låt $C = \{p, r, s, t\}$. En funktion från A till C är injektiv om varje element i A har en unik bild i C. Antalet sådan kan fås genom att räkna antalet sätt att successivt välja bilder till alla element i A. Elementet a kan ges 4 olika bilder. När en av dem valts kan b bara välja bland de 3 återstående. När en av dem valts kan c bara välja bland de två återstående, och så vidare. Vi får $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ injektiva funktioner från A till C, enligt multiplikationsprincipen.

Svar: a) Se relation och dess graf samt motiveringar av egenskaper ovan.
b) Det finns injektiva funktioner från A till B. Se exempel ovan.
c) Det finns 24 olika injektiva funktioner från A till C.

6. Vi har slutledningen:

Om tomten kommer så får jag paket. Det är julafton. Om jag inte varit snäll så kommer inte tomten. Om det är julafton och jag varit snäll så kommer tomten. Jag har varit snäll. Alltså får jag paket.

Vi inför följande satsparametrar:
p: Tomten kommer, q: Jag får paket,
r: Det är julafton, s: jag har varit snäll.

Slutledningen kan då skrivas som följande satslogiska uttryck:

$$(p \to q) \land r \land (\neg s \to \neg p) \land (r \land s \to p) \land s \;\Rightarrow\; q$$

Vi kan visa att detta är en korrekt slutledning med sanningsvärdestabell, deduktion eller reduktionsmetoden. Vi väljer här att göra det med deduktion då det blir klart kortast i detta fall.

1.)	r	Förutsättning.
2.)	s	Förutsättning.
3.)	$r \land s$	1.), 2.) och Konjunktionsregeln.
4.)	$r \land s \to p$	Förutsättning.
5.)	p	3.), 4.) och Modus ponens.
6.)	$p \to q$	Förutsättning.
7.)	q	5.), 6.) och Modus ponens.

Vi har härlett slutsatsen q ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt. (Vi kan notera att förutsättningen "Om jag inte varit snäll kommer inte tomten" inte behövs för slutsatsen.)

Svar: Slutledningen är korrekt. Se satslogiskt uttryck och härledning ovan.

7. Hur många bågar (uttryckt i n) behöver man ta bort från den fullständiga grafen K_n för att få ett spännande träd?

   Vi räknar först ut antalet bågar vi har i K_n från början. K_n är en enkel oriktad graf med bågar mellan samtliga par av noder, så om vi tänker utifrån en nod så har den bågar till alla noder utom sig själv, alltså $n-1$ bågar. Vi multiplicerar sedan med antalet noder och får $n(n-1)$. Dock har vi då räknat varje båge i båda ändar, så vi dividerar med 2 för att få antalet bågar i K_n, vilket då blir: $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

   Enligt satsen för träd är antalet bågar lika med antalet noder minus 1, så ett spännande träd för K_n som har n noder måste då ha $n-1$ bågar. Antalet bågar vi ska ta bort blir då mellanskillnaden mellan antalet bågar i K_n och och de vi vill ha kvar (n-1), vi får alltså: $\dfrac{n(n-1)}{2} - (n-1)$ Vi kan snygga till uttrycket något genom att skriva på gemensamt bråkstreck och bryta ut den gemensamma faktorn (n-1) och får då:

   $$\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2(n-1)}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \ .$$

   (Som en kontroll kan vi notera att detta uttryck blir 0 för både $n = 1$ och $n = 2$. Det stämmer också med att om vi ritar K_1 och K_2 så ska inga bågar tas bort, då de redan är träd. Kontroll kan förstås också göras för högre värden på n.)

   Svar: Antalet bågar som ska tas bort från K_n för att få ett spännande träd är:
   $\dfrac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$.