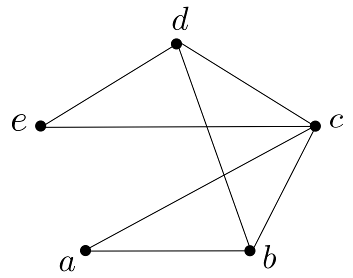
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

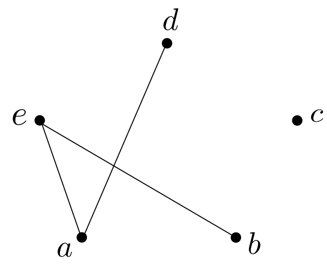
Lösningar till tentamen
726G35 Diskret matematik och logik, 7,5 hp
2023-03-15

---

1. a) Enligt sats finns det en sluten eulerväg om alla noder har jämnt gradtal och det finns en öppen eulerväg om precis två noder har udda gradtal. Då noderna b och d har udda gradtal (3) och övriga noder jämnt gradtal (2 respektive 4) så finns det alltså ingen sluten eulerväg, men en öppen. Ett exempel på öppen eulerväg är: $b-c-d-e-c-a-b-d$.



   b) Komplementgrafen består av samma noder och har bågar mellan de noder som G inte har bågar. Komplementgrafen $\overline{G}$ visas i figuren till höger.

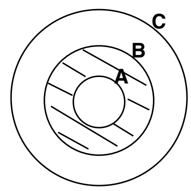


   c) Det finns en hamiltoncykel i G, till exempel: $a-b-d-e-c-a$.

Svar: Se ovan.

2. a) Med $A = B = C = \mathcal{U}$ är villkoret $A \subseteq B \subseteq C$ uppfyllt och alltså kan A innehålla hela grundmängden, d v s maximalt 10 element. Med $B = A = \emptyset$ är också villkoret uppfyllt, så B kan alltså innehålla 0 element som minst.

   b) $B \backslash A$ svarar mot det streckade området i figuren intill. $C \backslash B$ svarar mot det ostreckade området mellan B och C. Ett element i $B \setminus A$ ligger inuti B, men ett element i $C \setminus B$ ligger utanför B. Ett element kan alltså inte tillhöra båda dessa mängder.



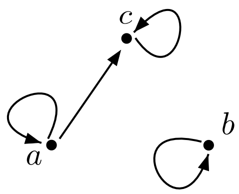
   $B \setminus A$ och $C \setminus B$ är därmed disjunkta (har inga gemensamma element) så enda möjligheten för $B \setminus A \subseteq C \setminus B$ är att $B \setminus A = \emptyset$, ty $\emptyset$ är delmängd till alla mängder. Att $B \setminus A = \emptyset$ innebär att alla element i B är element i A, det vill säga $B \subseteq A$. Då $A \subseteq B$ är givet från början följer att $A = B$.

Svar: a) A kan innehålla maximalt 10 element (hela $\mathcal{U}$) och B kan som minst innehålla 0 element.
b) $A = B$. Se motivering ovan.

3. a) Vi kan visa att $\neg(q \vee \neg r) \Leftrightarrow r \wedge \neg q$ genom en sanningsvärdestabell eller genom att skriva om den med en kedja av ekvivalenser. Redovisar omskrivning med hjälp av formelbladet här:

$$\neg(q \vee \neg r) \underset{\text{De morgans lag}}{\Leftrightarrow} \neg q \wedge \neg\neg r \underset{\text{Dubbel negation}}{\Leftrightarrow} \neg q \wedge r \underset{\text{kommutativa lagen}}{\Leftrightarrow} r \wedge \neg q$$

b) Ett exempel på en relation på $A = \{a, b, c\}$ som är reflexiv, men inte symmetrisk är $\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$. Den är reflexiv då alla element är relaterade till sig själva och den är inte symmetrisk då det finns en enkelriktad pil. En relation är symmetrisk om det bara finns dubbelriktade pilar.



c) $\mathcal{R} = \{(a,b),(b,c),(a,a)\}$ är inte en funktion på A. Dels så har a två bilder, dels så saknas det en bild för elementet c. Varje element i A ska ha precis en bild i A för att det ska vara en funktion.

Svar: a) Uttrycken är logiskt ekvivalenta. Se härledning ovan.
b) Se exempel på relation ovan.
c) Den givna relationen är ej en funktion från A till A.

4. a) Vi har chokladägg i fyra färger: blåa, gröna, orange och rosa. Vi tar två av varje färg och lägger i en rad. 8 ägg kan ordnas på 8! sätt, men då två ägg av samma färg byter plats fås inte en ny ordning. Vi måste därför dividera med 2! för vardera par. Detta ger:

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520.$$

Det finns alltså **2520** sätt att ordna de äggen med två ur varje färg.

b) Vi ska fylla påskägg med 10 chokladägg i vardera som väljs bland äggen i de fyra färgerna. Då samma färg kan upprepas, men ingen ordning finns mellan de valda objekten är det en kombination med upprepning (staketproblem). Med fyra färger att välja bland har vi 3 staket samt 10 ägg att ordna, där staketen tar 3 av de 13 platserna. Vi får:

$\binom{3+10}{3} = \binom{13}{3} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$. Det finns alltså **286** olika färgkombinationer med 10 ägg som väljs bland de fyra färgerna.

Svar: a) De åtta äggen med två av varje färg kan ordnas på 2520 olika sätt.
b) 286 olika färgkombinationer med 10 ägg kan väljas bland de fyra färgerna.

5. Låt B vara antalet bågar, N vara antalet noder och x antalet löv i grafen.

För träd gäller att $N = B + 1$.

Enligt uppgiften har vi $N = 1 + 2 + 5 + x = 8 + x$.

Handskakningslemmat säger att summan av gradtalen är 2 gånger antalet bågar så med de noder och gradtal som finns givna i uppgiften får vi:

$2 \cdot B = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + x \cdot 1 \;\Leftrightarrow\; 2B = 29 + x \;\Leftrightarrow\; B = \frac{29+x}{2}.$

Nu har vi både antalet noder N och antalet bågar B uttryckta i x och vi kan sätta in dessa uttryck i sambandet mellan noder och bågar för träd ovan. Vi får:

$N = B + 1 \;\Leftrightarrow\; 8 + x = \frac{29+x}{2} + 1 \;\Leftrightarrow\; 16 + 2x = 29 + x + 2 \;\Leftrightarrow\; x = 31 - 16 = 15.$

Det vill säga grafen har 15 löv.

Svar: Grafen har 15 löv.

6. Avgör med någon metod i kursen huruvida följande slutledning är logiskt korrekt eller ej:

$$(p \to \neg r) \wedge (s \vee t \to \neg q) \wedge p \wedge (\neg q \to r) \;\Rightarrow\; \neg s$$

Vi kan använda sanningsvärdestabell, reduktionsmetoden eller deduktion för att visa att denna slutledningen är korrekt. Vi väljer här att redovisa lösningen med deduktion:

1.)	p	Förutsättning
2.)	$p \to \neg r$	Förutsättning
3.)	$\neg r$	1.), 2.) och modus ponens.
4.)	$\neg q \to r$	Förutsättning
5.)	$\neg(\neg q)$	3.), 4.) och modus tollens.
6.)	$s \vee t \to \neg q$	Förutsättning
7.)	$\neg(s \vee t)$	5.), 6.) och modus tollens.
8.)	$\neg s \wedge \neg t$	7.) och De Morgans lag.
9.)	$\neg s$	8.) och Konjunktiv förenkling.

Vi har härlett slutsatsen $\neg s$ ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar: Slutledningen är korrekt. Se härledning ovan.

7. På mängden av alla studenter i SVP1 definierar vi relationen $\mathcal{R}$: ”har samma skostorlek som”. Vi motiverar för vardera egenskap:

-Relationen är reflexiv då alla studenter har samma skostorlek som sig själva. Varje student blir alltså relaterad till sig själv.

- Relationen är symmetrisk. Om student a har samma skostorlek som student b så har alltid b samma skostorlek som a och det gäller alla studenter a och b i SVP1. Således är relationen symmetrisk.

- Relationen är inte antisymmetrisk. En relation är antisymmetrisk om det bara finns enkelriktade pilar i dess relationsgraf, men som vi motiverade ovan så finns det dubbelriktade förbindelser mellan studenter med samma skostorlek. Se också delgrafen för de med storlek 37 nedan.

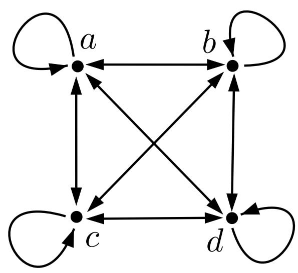
- Relationen är transitiv, för om student a har samma skostorlek som student b och b har samma skostorlek som student c så har alltid a samma storlek som c. Detta gäller alla studenter a, b och c i SVP1.

Var god vänd!

En relation är en partialordning om den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, men då denna relation inte är antisymmetrisk, så är den ej en partialordning.

En relation är en ekvivalensrelation om den är reflexiv, symmetrisk och transitiv och då relationen i uppgiften uppfyller dessa tre egenskaper så är den en ekvivalensrelation. (Ekvivalensklasserna blir de studenter som har samma skostorlek.)

Nedan visas den delgraf till relationsgrafen som visar hur de fyra studenterna med storlek 37 är relaterade. Komponenten (ekvivalensklassen) utgör en fullständig graf där alla är relaterade till varandra, dessutom loopar på alla noder.



Svar: Relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv, men ej antisymmetrisk. Därmed är den ej en partialordning, men en ekvivalensrelation. Se motiveringar samt delgraf för de med storlek 37 ovan.