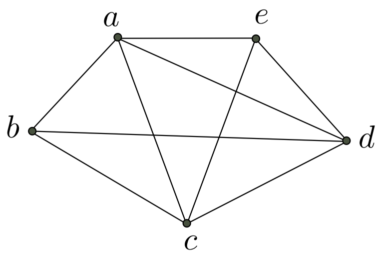
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

# Lösningar till tentamen
# 726G35 Diskret matematik och logik, 7,5 hp
# 2023-08-18

---

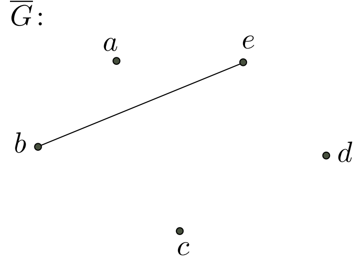
1. I figuren intill visas grafen $G$ på nodmängden $A = \{a, b, c, d, e\}$.




   a) En komplett graf har bågar mellan alla par av noder. $G$ är **ej** en komplett graf då den saknar en båge mellan noderna $b$ och $e$.

   b) Komplementet $\overline{G}$ har samma noder som $G$, men har bågar mellan de noder som $G$ inte har. Komplementet till $G$ visas i figuren till höger.

$\overline{G}$:




   c) Enligt sats 6.2 har en graf en öppen eulerväg om precis två noder har udda grad och har en sluten eulerväg om alla noder har jämnt gradtal.

   Då noderna $b$ och $e$ har grad 3 (två av udda gradtal) och övriga noder har grad 4 (jämnt gradtal) finns det enligt satsen en öppen eulerväg, men ingen sluten eulerväg. Ett exempel på en öppen eulerväg är $b - c - d - e - a - b - d - a - c - e$.

**Svar:** a) Grafen är ej komplett då bågen $(b, e)$ saknas.
b) $\overline{G}$ anges i bild ovan.
c) $G$ har en öppen eulerväg, men ej en sluten. Se motivering och exempel ovan.

2. a) Vi visar att $\neg(r \to s) \;\Leftrightarrow\; \neg s \wedge r$ med hjälp av sanningsvärdestabell. Kan också göras genom omskrivning med ekvivalenser. Kalla $S_1 : \neg(r \to s)$ och $S_2 : \neg s \wedge r$.

| $r$ | $s$ | $r \to s$ | $S_1$ : $\neg(r \to s)$ | $\neg s$ | $S_2$ : $\neg s \wedge r$ | $S_1 \leftrightarrow S_2$ $\neg(r \to s) \leftrightarrow (\neg s \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Då både vänster och högerled ger samma sanningsvärdestabell (kolumn 4 och 6) så är de logiskt ekvivalenta. Detta visas också genom att den sammansatta utsagan i kolumn 7 är en tautologi. Uttrycken är därmed logiskt ekvivalenta.

   b) Vi har den logiska slutledningen: *"Om jag hinner med tåget så kommer jag i tid till konserten. Jag kommer inte i tid till konserten eller jag fikar på stationen. Jag fikar inte på stationen. Slutsats: Jag hinner inte med tåget."*

   Vi inför satsparametrarna:

   $p$ : jag hinner med tåget, $q$ : jag kommer i tid till konserten,
   $r$ : jag fikar på stationen.

**Var god vänd!**

Slutledningen ovan kan med de införda satsparametrarna skrivas:

$$(p \to q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r \;\Rightarrow\; \neg p$$

c) Vi visar att slutledningen ovan gäller med hjälp av deduktion. Sanningstabell eller reduktionsmetoden fungerar också utmärkt.

| | | |
|---|---|---|
| 1.) | $\neg r$ | Förutsättning |
| 2.) | $\neg q \vee r$ | Förutsättning |
| 3.) | $\neg q$ | 1.), 2.) och disjunktiv syllogism. |
| 4.) | $p \to q$ | Förutsättning. |
| 5.) | $\neg p$ | 3.), 4.) och modus tollens. |

Vi har härlett slutsatsen $\neg p$ ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt.

**Svar:** a) Ekvivalensen gäller, se ovan.
b-c) Slutledning är korrekt, se uttryck och deduktion ovan.

3. a) En sammanhängande graf innehåller 23 noder och 30 bågar. Hur många bågar ska tas bort (med lämpliga val) för att få ett spännande träd till grafen? För träd gäller enligt sats att $N = B + 1$, där $N$ är antalet noder och $B$ är antalet bågar i det spännande trädet. Om vi har 23 noder får vi ekvationen $23 = B + 1 \;\Leftrightarrow\; B = 22$. Det spännande trädet i en graf med 23 noder har alltså 22 bågar. Om vi startar med 30 bågar måste vi alltså ta bort 30-22=8 stycken bågar.

b) För träd gäller som i a) att $N = B + 1$. Kalla antalet löv (de med gradtal 1) för $x$. Antalet noder är då enligt uppgiften $N = 10 + x$.

Enligt handskakningslemmat så är antalet bågar lika med summan av gradtalen delat med 2, vi får därför $B = \dfrac{10 \cdot 6 + 1 \cdot x}{2}$ .

Om vi nu sätter in uttrycken i $x$ som vi har för $N$ och $B$ i ekvationen för träd får vi:

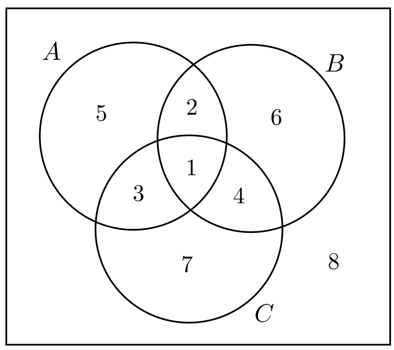
$N = B + 1 \;\Leftrightarrow\; 10 + x = \dfrac{10 \cdot 6 + 1 \cdot x}{2} + 1 \;\Leftrightarrow\; 20 + 2x = 60 + x + 2 \;\Leftrightarrow$

$20 + x = 62 \;\Leftrightarrow\; x = 42.$ Grafen har alltså 42 löv.

**Svar:** a) 8 lämpligt valda bågar måste tas bort för att få ett spännande träd.
b) Trädet har 42 löv.

4. a) $(A \cap B^c) \setminus C = (C^c \cap A) \setminus B$

Vi använder ett numrerat venndiagram och går igenom operationerna i vänsterled och högerled var för sig och ser vilka områden de svarar mot.




| VL: | HL: |
|---|---|
| $A$: $1, 2, 3, 5$ | $C$: $1, 3, 4, 7$ |
| $B$: $1, 2, 4, 6$ | $C^c$: $2, 5, 6, 8$ |
| $B^c$: $3, 5, 7, 8$ | $C^c \cap A$: $2, 5$ |
| $A \cap B^c$: $3, 5$ | HL=$(C^c \cap A) \setminus B$: 5 |
| $C$: $1, 3, 4, 7$ | |
| VL=$(A \cap B^c) \setminus C$: 5 | |

Då VL och HL svarar mot samma område i det numrerade venndiagrammet ovan har vi visat att likheten gäller för alla mängder $A$, $B$ och $C$.

**Var god vänd!**

b) $(B \setminus C)^c \cap A = (A \cap C) \setminus B$

Vi ger ett motexempel som visar att denna likheten inte gäller för alla mängder.

Låt $A = B = C = \{a\}$ och $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$. Vi får:

VL$= (B \setminus C)^c \cap A = (\{a\} \setminus \{a\})^c \cap \{a\} = \emptyset^c \cap \{a\} = \{a, b, c\} \cap \{a\} = \{a\}$.
HL$= (A \cap C) \setminus B = (\{a\} \cap \{a\}) \setminus \{a\} = \{a\} \setminus \{a\} = \emptyset$.

Då VL och HL ger olika mängder i exemplet ovan så gäller inte likheten för alla mängder $A$, $B$ och $C$.

**Svar:** a) Likheten gäller, se bevis ovan.
b) Likheten gäller ej, se motexempel ovan.

5. Vi utgår från bokstäverna i ordet SOMMAR och bildar olika bokstavsföljder.

a) Antalet följder med alla sex bokstäverna kan vi få genom att tänka att vi har sex platser, där den första kan väljas på 6 sätt, nästa på 5, nästa på 4 och så vidare, tills alla platser fått en bokstav. Enligt multiplikationsprincipen kan detta göras på 6! olika sätt. Dock har vi två M och när dessa byter plats får vi inte en ny bokstavsföljd. Vi dividerar därför med 2 för att kompensera för de två M:n. Vi får: $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 30 \cdot 12 = 360$. Det finns alltså 360 olika bokstavsföljder med de sex bokstäverna i ordet SOMMAR.

b) För att bestämma antalet bokstavsföljder med precis fyra bokstäver delar vi upp problemet i fall beroende på om vi har två M i följden eller inte.

**Fall 1:** Högst en av varje bokstav.
Vi ska välja bokstäver till fyra platser och det finns 5 bokstäver att välja bland. Enligt multiplikationsprincipen får vi då $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{120}$ olika följder med högst en av varje bokstav.

**Fall 2:** Två M, högst en av de övriga.
Placera först ut M:n. De ska ta två av de fyra platserna, utan inbördes ordning, så det kan göras på $\binom{4}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ olika sätt. Nu återstår två platser att fylla med övriga bokstäver. Det finns 4 bokstäver att välja bland i ”sommar” när nu M:n redan valts. Det ger $4 \cdot 3 = 12$ möjligheter för de sista två platserna, enligt multiplikationsprincipen, då ordningen mellan dessa spelar roll. Totalt i fall 2 får vi då $6 \cdot 12 = \mathbf{72}$ olika bokstavsföljder med två M i.

Sammanlagt finns det då $120+72 = 192$ olika bokstavsföljder med fyra bokstäver ur ordet SOMMAR.

**Svar:** a) Det finns 360 olika följder med alla sex bokstäverna i ordet SOMMAR.
b) De finns 192 olika följder med fyra bokstäver ur ordet SOMMAR.

6. Vi har $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,1), (2,2), (1,2), (3,3), (3,4), (4,4), (4,3), (5,5)\}$ som en relation på $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vi motiverar att denna är reflexiv, symmetrisk och transitiv, men inte antisymmetrisk.

Reflexiv? **Ja**, då alla element i $A$ är relaterade till sig själva i $\mathcal{R}$.

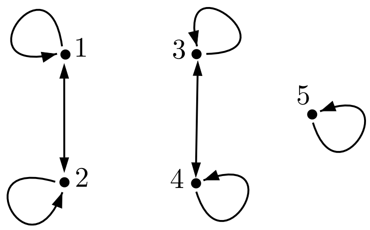
Symmetrisk? **Ja**, då samtliga förbindelser i $\mathcal{R}$ är dubbelriktade. Det finns ingen pil i relationsgrafen som bara går åt ett håll mellan två element. (Se relationsgrafen nedan.)

**Var god vänd!**

Antisymmetrisk? **Nej**, det finns dubbelriktade pilar i relationsgrafen, till exempel är både $1\mathcal{R}2$ och $2\mathcal{R}1$. Antisymmetri kräver enbart enkelriktade pilar mellan olika element.

Transitiv? **Ja**, då alla indirekt relaterade par, via ett tredje också är direkt relaterade. Gäller för alla element i $A$ och förbindelser i $\mathcal{R}$. Alltså om $a\mathcal{R}b$ och $a\mathcal{R}c$ så är alltid $a\mathcal{R}c$, där $a$, $b$ och $c$ är godtyckliga element i $A$.

Nedan anges relationsgraf och relationsmatris:




$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En relation är en ekvivalensrelation om den är reflexiv, symmetrisk och transitiv, så $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation och ekvivalensklasserna är $[1] = \{1, 2\}$, $[3] = \{3, 4\}$ och $[5] = \{5\}$, de tre komponenterna i relationsgrafen. Relationen är inte en partialordning då den inte är antisymmetrisk. Det krävs att en relation är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv för att vara en partialordning.

**Svar:** Relationen $\mathcal{R}$ på $A$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv, men ej antisymmetrisk. Se relationgraf och relationsmatris ovan. Relationen är en ekvivalensrelation, men ej en partialordning. Se motiveringar ovan.

7. I en vanlig kortlek med 52 kort finns fyra färger (spader, hjärter, ruter och klöver) och i varje färg finns 13 valörer (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, knekt, dam, kung och ess). En ”hand” i poker utgörs av fem kort och ordningen mellan korten spelar ej roll, bara vilken uppsättning kort vi har på handen.

a) En hand utgör en **kåk** om vi har tre kort ur en valör och två kort ur en annan valör. Antalet sådan kan vi beräkna genom att dela upp i fyra val. Välj först en valör ur vilken vi ska välja tre kort. Detta kan göras på 13 sätt (en av 13 valörer). Att sedan välja 3 av de 4 korten i denna valör, utan inbördes ordning, kan göras på $\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ sätt. Välj sedan en ny valör för de två korten, det kan göras på 12 sätt och dra till sist 2 kort ur den valda valör, utan inbördes ordning. Det kan då göras på $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ sätt.

Totalt fås enligt multiplikationsprincipen: $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744$ olika sätt att bilda en kåk.

b) Om vi har en hand med fyra kort ur en valör samt ett övrigt kort sägs vi ha **ett fyrtal**. Antalet sätt att få ett fyrtal kan beräknas på liknande sätt genom att först välja valör för fyrtalet, vilket kan göras på 13 sätt , och sedan välja alla fyra korten i den valda valören. Det kan bara göras på 1 sätt. Välj sedan ett ytterligare kort till handen. Det kan antingen väljas bland de 48 återstående korten på just 48 sätt, eller så kan vi dela upp valet i att först välja valör (12 sätt) och sedan välja ett av de fyra korten i den valören (4 sätt), vilket tillsammans ger $12 \cdot 4 = 48$.

Vi får alltså $13 \cdot 1 \cdot 48 = 624$ olika sätt att bilda fyrtal på, enligt mult.principen.

**Var god vänd!**

**Svar:** a) Det finns 3744 olika sätt att bilda en kåk.
b) Det finns 624 olika sätt att få en hand med ett fyrtal.

(Vi noterar att det är mer än fem gånger så vanligt att få kåk än fyrtal på given och ska ställas mot de ca 2,6 miljoner händer som finns med 5 kort i en kortlek. Ungefär en gång på 700 fås en kåk på given och ett fyrtal så sällan som en gång på drygt 4000.)