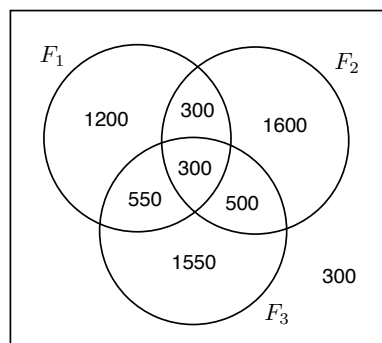


Lösningar till tentamen
726G35 Diskret matematik och logik, 7,5 hp
2024-01-12

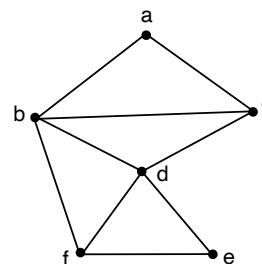
1. Vi använder ett venndiagram för att strukturera informationen i uppgiften. Med start inifrån och ut kan vi successivt räkna ut hur många personer som finns i varje område i venndiagrammet. Vi får resultatet intill och kan nu besvara frågorna genom att läsa av lämpliga områden.



- a) Bara kund hos F_1 är de som står i det området inom F_1 som inte överlappar de andra, det vill säga 1200 personer.
- b) Att vara kund i mer än ett företag i koncernen innebär att man ligger i något av de områden där cirklarna överlappar varandra. Ur venndiagrammet fås antalet till $300 + 300 + 550 + 500 = 1650$ personer.
- c) Antalet som är kund i koncernen men inte hos någon av de tre nämnda företagen är det antal som ligger utanför cirklarna, det vill säga 300 st.

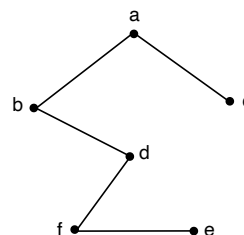
Svar: a) 1200 personer är bara kund hos F_1 .
b) 1650 personer är kund hos mer än ett av de tre företagen.
c) 300 personer är kund hos koncernen men inte just i de tre företagen F_1, F_2, F_3 (utan hos något annat företag i koncernen).

2. a) Det finns en hamiltoncykel i grafen, till exempel $a - b - f - e - d - c - a$.



- b) Enligt sats så finns det en sluten eulerväg precis då alla noder har jämnt gradtal och en öppen eulerväg bara om precis två noder ha udda gradtal. I denna graf har nod a och e grad 2, nod b och d grad 4 och nod c och f har grad 3. Då de två sista har udda grad finns det alltså en öppen eulerväg, men ej en sluten enligt satsen. Exempel på en öppen eulerväg är $c - a - b - f - e - d - c - b - d - f$.

- c) Ett spännande träd är en delgraf till den ursprungliga grafen som innehåller alla noder och är ett träd. Det finns många möjligheter. En möjlighet är det spännande träd som visas här intill. Antalet löv i detta träd är två st, nämligen c och e . (Beroende på vilket spännande träd man väljer kan man få mellan 2 och 4 löv.)



- Svar:** a) Ja, det finns en hamiltoncykel, t ex $a - b - f - e - d - c - a$.
 b) Finns ej sluten eulerväg, men en öppen enligt motivering ovan.
 Ett exempel på en öppen eulerväg är: $c - a - b - f - e - d - c - b - d - f$.
 c) Se spännande träd ovan. Detta träd har två löv, nämligen c och e .

3. Vi använder en sanningsvärdestabell för att besvara frågorna.

p	q	r	$q \vee r$	$S_1: p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$S_2: (p \wedge q) \vee r$	$S_1 \leftrightarrow S_2$	$S_1 \rightarrow S_2$	$S_2 \rightarrow S_1$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

S_1 är ej ekvivalent med S_2 då $S_1 \leftrightarrow S_2$ ej är en tautologi (ej 1:or på alla rader) enligt ovanstående sanningsvärdestabell. Inte heller $S_2 \rightarrow S_1$ är en tautologi, så S_2 implicera inte S_1 . $S_1 \rightarrow S_2$ är dock en tautologi, så S_1 implicerar S_2 , eller annorlunda uttryckt, S_2 är en logisk konsekvens av S_1 .

Svar: S_1 och S_2 är inte logiskt ekvivalenta, men S_1 implicerar S_2 .

4. a) Vi delar upp problemet i två fall:

I) Cecilia och Moa är med och arrangerar vårutflykt:

Det finns då 10 personer att välja bland för att hitta en tredje person. Totalt alltså 10 sätt att välja Cecilia, Moa och en tredje person.

II) Cecilia och Moa är inte med och arrangerar vårutflykt:

Då finns det 10 personer bland vilka vi ska välja 3 utan inbördes ordning, vilket ger: $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.

Totalt $120 + 10 = 130$ olika sätt att välja en grupp om tre som arrangerar vårutflykt utifrån givna villkor.

b) Bland samma 12 personer ska istället en styrelse med ordförande, kassör och sekreterare väljas ut. Cecilia väljer då helt att avstå från att väljas, men om Moa väljs så ska hon vara ordförande. Vi delar också här upp i fall:

1) Moa är med i styrelsen som ordförande:

Då finns det ytterligare två poster att tillsätta bland 10 personer, då Cecilia avstår val. Det ger $10 \cdot 9 = 90$ sätt att tilldela övriga poster i styrelsen. Ordningen mellan de valda personerna spelar här roll.

2) Moa och Cecilia är inte med i styrelsen: Då kan de tre posterna tillsättas bland de 10 personerna. Detta ger val med ordning och multiplikationsprincipen ger $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ olika sätt i detta fall.

Totalt fås då $90 + 720 = 810$ olika styrelser utifrån givna villkor, enligt additionsprincipen.



Var god vänd!

- Svar:** a) Med givna villkor kan gruppen om tre väljas ut på 130 olika sätt.
b) Det finns 810 olika styrelser utifrån givna villkor.

5. Formulera följande slutledning som ett satslogiskt uttryck med satsparametrar och konnektiv och avgör sedan med hjälp av någon metod i kursen om slutledningen är korrekt.

”Om det snöar så är bussen sen. Om jag fikar i Baljan så missar jag bussen. Det snöar. Om bussen är sen missar jag den inte. Alltså fikar jag inte i Baljan.”

Vi inför satsparametrarna:

p : Det snöar.

q : Bussen är sen.

r : Jag fikar i Baljan.

s : Jag missar bussen.

Slutledningen får då formen:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge p \wedge (q \rightarrow \neg s) \Rightarrow \neg r$$

Vi kan visa att denna slutledning är korrekt med hjälp av sanningsvärdestabell, reduktionsmetoden eller med deduktion. Vi väljer här att redovisa deduktionen.

- 1.) p Föreläggning
- 2.) $p \rightarrow q$ Föreläggning
- 3.) q 1.), 2.) och modus ponens.
- 4.) $q \rightarrow \neg s$ Föreläggning.
- 5.) $\neg s$ 3.), 4.) och modus ponens.
- 6.) $r \rightarrow s$ Föreläggning.
- 7.) $\neg r$ 5.), 6.) och modus tollens.

Vi har härlett slutsatsen $\neg r$ ur föreläggningarna och slutledningen är därmed korrekt.

Svar: Se satslogiskt uttryck och deduktion ovan.

6. Då grafen är sammanhängande och saknar cykler så är den ett träd. Vi har 1 nod av grad 8, 2 noder av grad 3, 22 noder av grad 1 (löv) och x stycken noder av grad 4.

$$\text{Antalet noder är alltså: } N = 1 + 2 + 22 + x = 25 + x. \quad (1)$$

Enligt handskakningslemmat är summan av gradtalen alltid två gånger antalet bågar (B) så

$$2 \cdot B = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 3 + 22 \cdot 1 + x \cdot 4 = 36 + 4x \Leftrightarrow B = \frac{36+4x}{2}. \quad (2)$$

Då grafen är ett träd gäller ju enligt sats att $N = B + 1$, där N är antalet noder och B är antalet bågar. Med uttryck (1) och (2) ovan insatt i detta samband får vi:

$$N = B + 1 \Leftrightarrow 25 + x = \frac{36+4x}{2} + 1 \Leftrightarrow 24 + x = \frac{36+4x}{2} \Leftrightarrow$$

$$48 + 2x = 36 + 4x \Leftrightarrow 12 = 2x \Leftrightarrow 6 = x.$$

Svar: Grafen som är ett träd har 6 noder av grad 4.

7. Vi har $A = \{a, b, c, d\}$.

a) Inför relationen "lika med" på A , det vill säga $x\mathcal{R}_1y$ om $x = y$ för $x, y \in A$.

\mathcal{R}_1 är reflexiv eftersom $x = x$ för alla $x \in A$.

\mathcal{R}_1 är symmetrisk för om $x = y$ så är även $y = x$ för alla element i A .

\mathcal{R}_1 är antisymmetrisk. Enligt definitionen är \mathcal{R}_1 antisymmetrisk om $x \neq y$ och $x = y \Rightarrow x \neq y$. Denna implikation blir sann genom att förledet $x \neq y$ och $x = y$ aldrig uppfylls.

\mathcal{R}_1 är transitiv eftersom om $x = y$ och $y = z$ så gäller ju att $x = z$ för alla x, y, z i A .

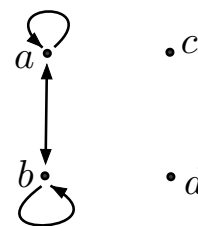
Relationsgraf och relationsmatris ser ut enligt nedan:



b) Med A som tidigare uppfyller följande relation kraven:

$$\mathcal{R}_2 = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$$

Se relationsgraf till höger. Denna är ej reflexiv, då c och d inte är relaterade till sig själva. Den är symmetrisk då den endast innehåller dubbelpilar (looparna är sin egen omvända riktning). Den är också transitiv då alla tvåstegsförbindelser, via något element också är direkt förbundna. Vi har $a\mathcal{R}_2b$ och $b\mathcal{R}_2a$ och då finns $a\mathcal{R}_2a$. På samma sätt med b : $b\mathcal{R}_2a$ och $a\mathcal{R}_2b$ och då finns $b\mathcal{R}_2b$. Detta gäller också övriga tvåstegsförbindelser med en loop och bågen (a, b) i någon ordning. Relationen \mathcal{R}_2 är alltså ett exempel på en relation som är symmetrisk och transitiv, men inte reflexiv.



Svar: a) Relationen "lika med" på A uppfyller alla fyra egenskaperna.

Se graf och matris ovan.

b) Se exempel och motiveringar ovan.