Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Daniel Carlsson

Lösningar till tentamen
726G35 Diskret matematik och logik, 7,5 hp
2024-03-13

---

1. Vi har $A = \{1, 2, 3\}$.

   a) Med $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$ så är alla element i A är relaterade till sig själva, så är relationen reflexiv. En relation är antisymmetrisk om den bara innehåller enkelriktade förbindelser mellan olika element, men då både paret (1,2) och (2,1) finns i $\mathcal{R}$ så är relationen inte antisymmetrisk.

   b) Ett exempel på en funktion på A är $f = \{(1,2), (2,3), (3,3)\}$, då alla element i A har precis en bild. Den är inte surjektiv då 1 inte är bild till något element. En funktion är surjektiv om alla element i målmängden är bilder till något element i definitionsmängden. (I detta fall är A både definitionsmängd och målmängd.)

   c) Antalet möjliga par som vi kan bilda från A till A är $3 \cdot 3 = 9$ stycken. För var och en av dessa kan vi välja om de ska vara med eller inte i en viss relation, så det finns totalt $2^9 = 512$ relationer, enligt multiplikationsprincipen.

   Svar: a) Se motivering ovan
   b) Till exempel $f = \{(1,2), (2,3), (3,3)\}$ som ej är surjektiv.
   (Finns 27 möjliga funktioner.)
   c) Det finns 512 relationer på A.

2. a) Vi visar att Modus tollens: $(p \to q) \wedge \neg q \;\Rightarrow\; \neg p$ är en korrekt logisk implikation med hjälp av sanningsvärdestabell.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

   Vi ser att implikationen i sista kolumnen är sann på alla rader, alltså en tautologi, och därmed har vi visat att $(p \to q) \wedge \neg q \;\Rightarrow\; \neg p$ är en korrekt logisk implikation.

   b) Slutledningen nedan är ej korrekt. Vi ger ett motexempel som visar att alla förutsättningar kan vara sanna samtidigt som slutsatsen är falsk.

$$(r \to s) \wedge (p \to \neg r) \wedge p \;\Rightarrow\; \neg s$$

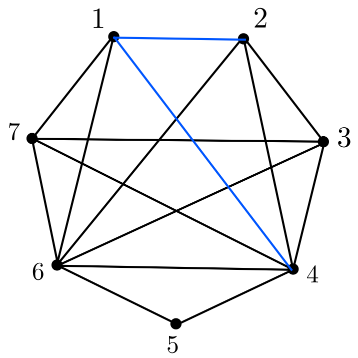
   Om p är sann, r är falsk och s sann så blir $r \to s$ sann, $p \to \neg r$ sann och p sann, alltså är alla förutsättningar sanna för denna uppsättning sanningsvärden, men $\neg s$ blir falsk. Alltså gäller inte denna slutledning då det finns en rad i

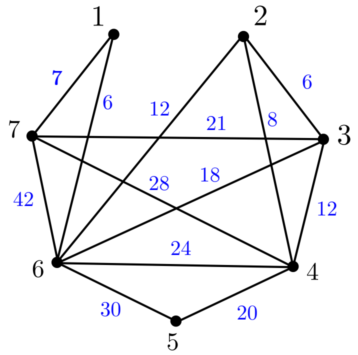
Var god vänd!

sanningsvärdestabellen där implikationen blir falsk. Detta ger alltså ett motexempel.

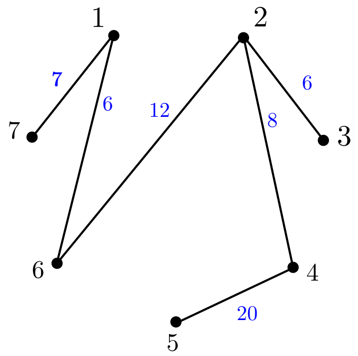
Svar: a) Se bevis för modus tollens ovan.
b) Slutledningen är ej korrekt, se motexempel ovan.

3. a) Enligt sats finns det en sluten eulerväg om samtliga noder har jämnt gradtal. I den ursprungliga grafen (svarta bågar) har nod 2 och 4 udda gradtal, övriga har jämna gradtal, så någon sluten eulerväg finns ej. Om både nod 2 och 4 ansluts med en båge till nod 1 (en nod som båda saknar förbindelse till) så kommer alla noder få jämnt gradtal och därmed kommer det existera en sluten eulerväg. (Det är nödvändigt att ansluta noderna 2 och 4 till samma nod för att inte skapa nya noder med udda gradtal.) Det minsta antal bågar som behöver läggas till är alltså 2 och dessa måste anslutas till nod 1. Drar man bara en båge till från nod 2 till 4 så blir inte grafen längre enkel, då den då har dubbla bågar mellan 2 och 4.





b) I figuren till höger visas den viktade grafen med kostnader utskrivna i blått. Vi tar fram ett billigaste nätverk med hjälp av Kruskals algoritm. Starta med noderna utan bågar. De billigaste bågarna är de med kostnad 6. Välj bågen (1-6). Även bågen (2-3) med kostnad 6 kan väljas utan att cykel bildas. Nästa billigaste båge är (1-7) med kostnad 7. Väljs, då cykel ej bildas. Nästa billigaste båge är (2-4) med kostnad 8. Väljs, då cykel ej bildas. Nästa billigaste bågar är de med kostnad 12. Bågen (3-4) väljs **ej** då cykel då bildas, men båge (2-6) väjs, då cykel ej bildas. Nästa billigaste båge är (3-6) med kostnad 18. Väljs **ej** då cykel då bildas med de tidigare valda. Nästa billigaste båge är (4-5) med kostnad 20. Väljs, då cykel ej bildas.



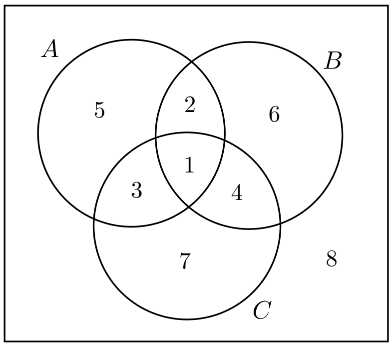
Vi har nu valt 6 bågar och har därmed ett minimalt spännande träd som figuren ovan visar. Total kostnad blir $6 + 6 + 7 + 8 + 12 + 20 = 59$ tusen kronor.

Svar: a) Sluten eulerväg finns ej i den ursprungliga grafen men om bågarna (1-2) och (1-4) läggs till så finns det det enligt sats då alla gradtal blir jämna.

b) Se billigaste nätverk ovan. Minimal kostnad blir 59 000 kr.

4. a) $A \cap (B \cup \overline{C}) = A \setminus (C \setminus B)$

Vi använder ett numrerat venndiagram och går igenom operationerna i vänsterled och högerled var för sig, en operation i taget, och visar att likheten gäller.



VL:	HL:
B: 1, 2, 4, 6	C: 1, 3, 4, 7
$\overline{C}$: 2, 5, 6, 8	$C \setminus B$: 3, 7
$B \cup \overline{C}$: 1, 2, 4, 5, 6, 8	A: 1, 2, 3, 5
A: 1, 2, 3, 5	HL= $A \setminus (C \setminus B)$: 1, 2, 5
VL=$A \cap (B \cup \overline{C})$: 1, 2, 5	

Då VL och HL svarar mot samma område i det numrerade venndiagrammet ovan har vi visat att likheten gäller för alla mängder A, B och C.

b) $(\overline{B} \cap C) \setminus \overline{A} = (C \cap A) \setminus \overline{B}$

Likheten gäller ej och vi ger ett konkret motexempel.

Låt $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$, $A = B = C = \{a\}$. Vi beräknar vänster- och högerled.

VL= $(\overline{B} \cap C) \setminus \overline{A} = (\overline{\{a\}} \cap \{a\}) \setminus \overline{\{a\}} = (\{b, c\} \cap \{a\}) \setminus \{b, c\} = \emptyset \setminus \{b, c\} = \emptyset$.

HL= $(C \cap A) \setminus \overline{B} = (\{a\} \cap \{a\}) \setminus \overline{\{a\}} = \{a\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$.

Då VL och HL ger olika mängder i vårt exempel ovan så gäller inte likheten för alla mängder A, B och C.

Svar: a) Likheten gäller, se bevis ovan.
b) Likheten gäller ej, se motexempel ovan.

5. a) Vi ska köpa 10 färgpennor i de fyra färgerna svart, blå, grön och röd. Då vi får upprepa samma färg och ordningen ej spelar roll, så är det en kombination med upprepning, alltså ett staketproblem. Med fyra färger får vi tre ”staket”. 10 pennor som ska väljas plus 3 staket ger 13 objekt bland vilka vi väljer plats för de tre staketen. Det ger:

$\binom{10+3}{3} = \binom{13}{3} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = \mathbf{286}$.

b) På hur många sätt kan detta göras om du vill ha minst en av varje färg och högst tre svarta?

Ta först en penna av varje färg, då återstår 6 pennor som ska väljas. Vi räknar ut på hur många sätt detta kan göras och drar sedan bort antalet bland dessa som innehåller fler än tre svarta. Antalet med minst en av varje blir på motsvarande sätt som ovan $\binom{6+3}{3} = \binom{9}{3} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = \mathbf{84}$.

Var god vänd!

För att dra bort dem av dessa som innehåller fler än tre svarta så tar vi först en av varje färg samt ytterligare tre svarta så att vi har totalt 4 svarta. Då återstår att välja 3 pennor och alla dessa kombinationer kommer innehålla fler än 3 svarta och det kan på samma sätt som ovan göras på $\binom{3+3}{3} = \binom{6}{3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{20}$ sätt.

Sammanlagt fås då $86 - 20 = \mathbf{64}$ kombinationer med en av varje färg och högst tre svarta.

Svar: a) Det finns 286 olika färgkombinationer för 10 pennor bland 4 färger.
b) 64 kombinationer innehåller av av varje färg och högst tre svarta.

6. Efter en bilolycka där en bil kört på en fotgängare (som klarade sig väl) går polisen igenom vad de vet om olyckan:

- Bilen lämnade bromsspår vid olyckan,
- Om föraren var rattfull vid olyckan så försvann föraren från platsen omedelbart.
- Om föraren inte var rattfull och föraren inte somnat så var olyckan avsiktlig.
- Om det finns bromsspår så lämnade inte föraren platsen omedelbart.
- Olyckan var inte avsiktlig.

Efter en stunds funderande säger en polis beslutsamt: ”Alltså måste föraren ha somnat vid ratten”.

Vi inför följande satsparametrar:

p: Bilen lämnade bromsspår vid olyckan.
q: Föraren körde rattfull.
r: Föraren lämnade platsen omedelbart.
s: Föraren har somnat vid ratten.
t: Olyckan var avsiktlig.

Slutledningen ovan blir då som satslogiskt uttryck:

$$p \wedge (q \to r) \wedge (\neg q \wedge \neg s \to t) \wedge (p \to \neg r) \wedge \neg t \;\Rightarrow\; s$$

Vi visar att slutledningen är korrekt med hjälp av deduktion:

1.)	p	Förutsättning
2.)	$p \to \neg r$	Förutsättning
3.)	$\neg r$	1.), 2.) och modus ponens.
4.)	$q \to r$	Förutsättning.
5.)	$\neg q$	3.), 4.) och modus tollens.
6.)	$\neg t$	Förutsättning.
7.)	$\neg q \wedge \neg s \to t$	Förutsättning.
8.)	$\neg(\neg q \wedge \neg s)$	6.), 7.) och modus tollens.
9.)	$\neg\neg q \vee \neg\neg s$	8.) och De Morgans lag.
10.)	$q \vee s$	9.) och dubbel negation.
11.)	s	5.), 10.) och disjunktiv syllogism.

Vi har härlett slutsatsen s ur förutsättningarna och slutledningen är därmed korrekt. (Slutledningen kan också visas med sanningsvärdestabell eller reduktionsmetoden.)

Svar: Slutledningen är korrekt. Se härledning ovan.

7. Vi bildar alla möjliga bokstavsföljder med samtliga sex bokstäver K L R V Å Ö. Det finns 720 olika sådana bokstavsföljder. Vi skriver upp dessa följder i bokstavsordning. På vilken plats i ordningen kommer ordet VÅRLÖK ?

   Högst upp i listan med alla ord finns de som börjar på K. Antalet ord som börjar på K fås genom att permutera de 5 bokstäver som finns efter K, vilket går att göra på 5! sätt, d v s 120 sätt. Det finns alltså 120 ord som börjar på K. På samma sätt finns det 120 ord som börjar på L och 120 ord som börjar på R. Sammanlagt 360 ord så här långt.

   Nästa ord (nr 361) är det första som börjar på V. Bland de som börjar på V måste de första börja på VK och antalet sådan fås genom att omordna de 4 bosktäver som står efter VK, nämligen L, R, Å och Ö, vilket då kan göras på 4! sätt, så det finns 4!=24 ord som börjar på VK. Enligt samma idé finns det sedan 24 ord som börjar på VL, och 24 som börjar på VR, totalt alltså $3 \cdot 24 = 72$ som börjar på V, innan vi kommer fram till VÅ.

   De första på VÅ startar på VÅK och blir enligt samma princip 3!=6 st. Därefter följer de som börjar på VÅL och de är 3!=6 st.

   Hittills har vi alltså passerat $120+120+120+72+6+6 = 444$ ord. Nu är vi framme vid VÅR... och vi kan lista orden som börjar på VÅR i bokstavsordning.

   Vi får:

   445 VÅRKLÖ
   446 VÅRKÖL
   447 VÅRLKÖ
   448 VÅRLÖK
   449 VÅRÖKL

   .

   .

   Vi ser att ordet VÅRLÖK kommer på plats 448.

   Svar: Ordet VÅRLÖK står på plats 448 när alla bokstavsföljder skrivs i bokstavsordning.