Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Utbildningskod: 764G07
Modul: TEN2

Matematisk analys del2

facit

2023-03-14, kl 14.00-19.00

Obs: för utförligare lösningsskisser av liknande uppgifter hänvisas till anteckningar från undervisningen bland annat.

1. Svar:

   a) $\int_1^e \ln x dx = 1$

   b) $\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x} dx = 2\pi$

   c) $\int_1^2 \frac{1}{x^2+x} dx = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

2. Kort lösningsskiss:

   $y' = yx \sin x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = yx\sin x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = x\sin x^2 dx$, om $y \neq 0$.

   Obs: om $y=0$ fås ekvationen $y'=0$. Vi söker en lösning som uppfyller $y(0)=1 \Rightarrow y=0$ är ej av intresse. $\int \frac{dy}{y} = \int x\sin x^2 dx \Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$.

   $y(0)=1$ ger vidare efter insättningen i $\ln|y| = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$ att $C = e^{1/2}$.

   Alltså efter ytterligare omskrivningar får vi att $y = e^{\frac{1-\cos x^2}{2}}$.

   Svar: $y = e^{\frac{1-\cos x^2}{2}}$.

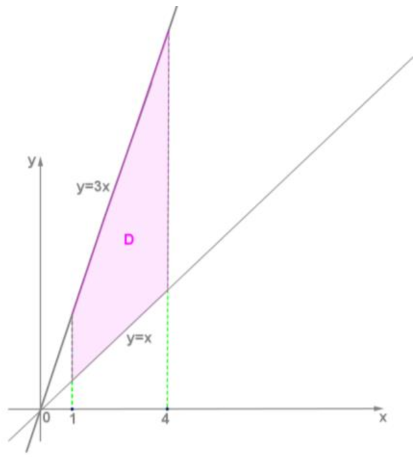
3. Kort lösningsskiss:

   skivformeln ger $V = \int_1^2 \pi y^2 dx = \pi\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = \pi \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ (enligt 1c)

   Svar: $V = \pi \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ v.e.

4. Lösningsskiss:

- Börja med att skissa området av intresse (viktigt för korrekt bestämning av integrationsgränserna)



$$\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy = \int_1^4 \left(\int_{y=x}^{y=3x} \frac{y}{x}\,dy \right) dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} \cdot \int_{y=x}^{y=3x} y\,dy \right) dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=3x} \right) dx =$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{1}{2x} \cdot \left[y^2 \right]_{y=x}^{y=3x} \right) dx = \ldots = \int_1^4 \left(\frac{9}{2}x - \frac{x}{2} \right) dx = \ldots = 30$$

Svar: $\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy = \int_1^4 \left(\int_{y=x}^{y=3x} \frac{y}{x}\,dy \right) dx = 30$

5. Lösningsskiss:

Obs: beteckningen för stort ordo ska vara $\mathcal{O}$ när **vi skriver** (följ givna anteckningar och notationen från undervisningen).

Obs: det förväntas att du kommenterar alla steg på motsvarande sätt som uppgifterna av liknande karaktär som noggrant togs upp på seminarier. Följ alltid notationen som har förmedlats vid undervisningen.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{x^2} = \ldots = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + \mathrm{O}(x^4) - (1 - 2x^2 + \mathrm{O}(x^4))}{x^2} = \ldots = 3$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \left(e^{1/x} \cdot \sqrt{(x^4 + x^2)} - x^2 - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(e^{1/x} \cdot x^2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - x^2 - x \right) =$$

$$= \ldots = \lim_{x\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \cdot x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{1}{x^4} \right) \right) - x^2 - x \right) = \ldots = 1$$

Svar: a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{x^2} = 3$, b) $\lim_{x\to\infty} \left(e^{1/x} \cdot \sqrt{(x^4 + x^2)} - x^2 - x \right) = 1$

6. Svar: Största värde ges av $f(3,0)=9$ och minsta värde av $f(1,1)=\frac{1}{2}$.

Obs: för utförligare lösningsskisser av liknande uppgifter hänvisas till anteckningar från undervisningen bland annat. Super viktigt att du inte missar nödvändiga kommentarer som hänvisar till lämpliga satser för den typen av uppgifter.

7. Lösningsskiss: $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ är kontinuerlig för $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. $\cos x$ är strängt avtagande för $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\cos x}$ är strängt växande på intervallet $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\cos x}$ har en invers g

$$\int_1^{\sqrt{2}} g(x)dx = \begin{bmatrix} g(x)=t \\ x=f(t) \\ dx=f'(t)dt \end{bmatrix} = \int_0^{\pi/4} t \cdot f'(t)dt = [\text{ partiell integration }] = [t \cdot f(t)]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t}dt =$$

$$= \left[t \cdot \frac{1}{\cos t} \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt = \ldots = \frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4} - \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Svar: $\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4} - \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

the end