Enkla trigonometriska ekvationer för 764G08
By Malgorzata Wesolowska

Du hittar här:

- Exempel(med teori) med <u>utförliga</u> lösningar och tips på hur du ska komma fram till lösningen utan miniräknare alltså för egen maskin. Det är meningen att givna lösningar ska ger dig bra stöd till vidare studier.

  Exempel 1: Lös ekvationen $\cos v = \frac{1}{2}$.

  Exempel 2: Lös ekvationen $\sin v = \frac{1}{2}$.

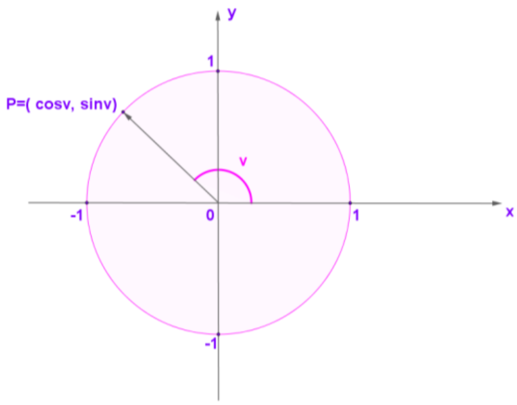
  Exempel 3: Lös ekvationen $\cos v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Uppgifter
- Svar

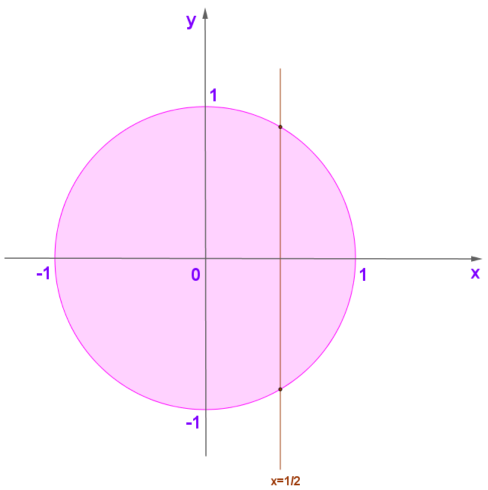
Exempel 1: Lös ekvationen $\cos v = \frac{1}{2}$.

Lösning med tillhörande teori:

Vi börjar med att titta på en enhetscirkel nedan. Vi ser att varje punkt som ligger på randen av cirkeln har $x-$koordinaten som motsvarar värdet av $\cos v$. Alltså vi kan konstatera att $\cos v = 1/2 = x$.
Obs: vinkeln v utgår alltid från positiva $x-$axeln!



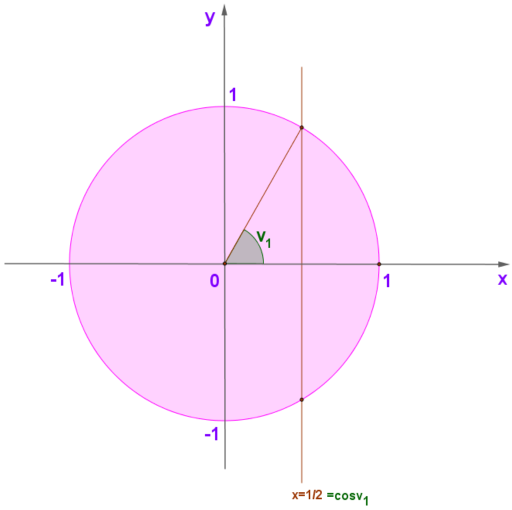
Vi ritar nu egen enhetscirkeln och linjen $x = 1/2$. Linjen skär cirkeln i två punkter som har samma $x-$koordinat.



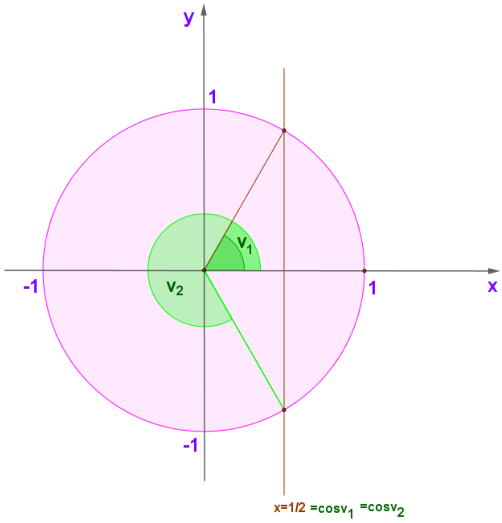
Enkla trigonometriska ekvationer för 764G08
By Malgorzata Wesolowska

Dags att förena origo med respektive punkt för att hitta vinklar av intresse. Obs: i denna kurs fokuserar vi bara på vinklar som är $v \geq 0^\circ$.

Bilden ger oss den första vinkeln som uppfyller ekvationen $\cos v = 1/2$ och betecknas $v = v_1$.
Vi kan även se att vinkeln
$v = v_1 + 360^\circ$ ger oss samma punkt på randen och även
$v = v_1 + n \cdot 360^\circ$ ger samma punkt, där n är ett heltal.



På motsvarande sätt fortsätter vi förena origo med den andra skärningspunkten.



Bilden ger oss den adra vinkeln som uppfyller ekvationen $\cos v = 1/2$ och betecknas $v = v_2$. Bilden visar tydligt samband mellan respektive v_1 och v_2, $v_2 = 360^\circ - v_1$.

Vi kan även se att vinkeln
$v = v_2 + 360^\circ$ ger oss samma punkt på randen och även
$v = v_2 + n \cdot 360^\circ$ ger oss samma punkt på randen, där n är ett heltal.

Vinkeln $v = v_1$ ligger i den första kvadranten och vinkeln $v = v_2$ ligger i den fjärde kvadranten. Obs: kvadranterna räknas moturs.

Så generellt sökes varje lösning för ekvationen $\cos v = x$ precis med samma resonemang som ovan.

Vi har då samtliga lösningar

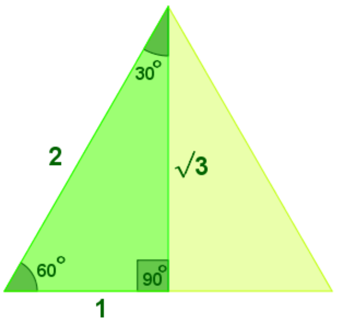
$$\cos v = x \Leftrightarrow \begin{cases} v = v_1 + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = v_2 + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z \Leftrightarrow \left[v_2 = 360^\circ - v_1 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} v = v_1 + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 360^\circ - v_1 + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$$

Obs: Beteckningen $\in$ läses som tillhör. Z betecknar mängden av hela tal (från det tyska ordet Zahlen (tal)). $n \in Z$ läses "n tillhör heltal"

Enkla trigonometriska ekvationer för 764G08
By Malgorzata Wesolowska

$$\cos v = x \Leftrightarrow \begin{cases} v = v_1 + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 360^\circ - v_1 + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$$

Ok! Så vi vet i vilka kvadranter finns lösninagar till $\cos v = 1/2$. Det är dags att ta fram lämplig triangel för att hitta exakta lösningar.



$$\cos v = \frac{1}{2} = \frac{\text{näliggande katet}}{\text{hypotenusan}}.$$

Den speciella triangeln ger oss direkt <u>en</u> lösning i första kvadranten, vinkeln $v = v_1 = 60^\circ$.

<u>Samtliga</u> lösningar blir då $\cos v = 1/2 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 360^\circ - 60^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} v = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 300^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$

och den minsta <u>positiva</u> vinkeln som uppfyller ekvationen är $v = 60^\circ$.

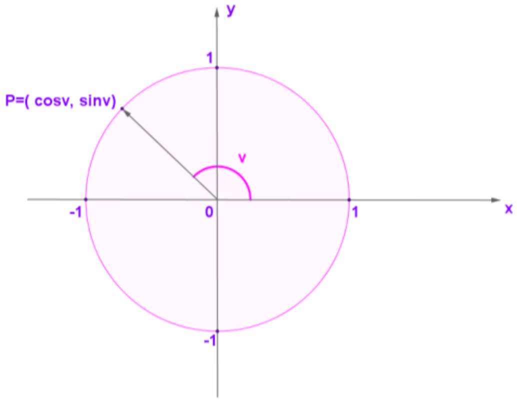
Svar: $v = \begin{cases} 60^\circ + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ 300^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$. Svaret i radianer ges av $\begin{cases} v = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \\ eller \\ v = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi \end{cases}, n \in Z$.

Obs: i denna kurs (764G08) kommer vi oftast söka just den minsta positiva eller 0° (graders) vinkeln.

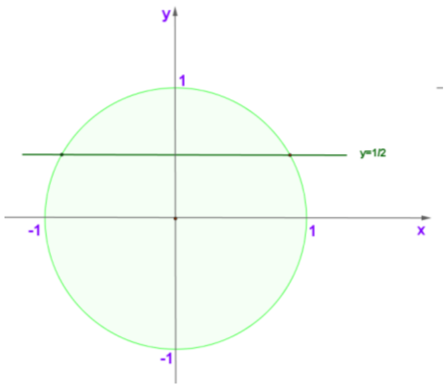
Exempel 2: Lös ekvationen $\sin v = 1/2$.

Lösning med tillhörande teori:

Vi börjar med att titta på en enhetscirkel nedan. Vi ser att varje punkt som ligger på randen av cirkeln har $y-$koordinaten som motsvarar värdet av $\sin v$. Alltså vi kan konstatera att $\sin v = 1/2 = y$.
Obs: vinkeln v utgår alltid från positiva $x-$axeln!



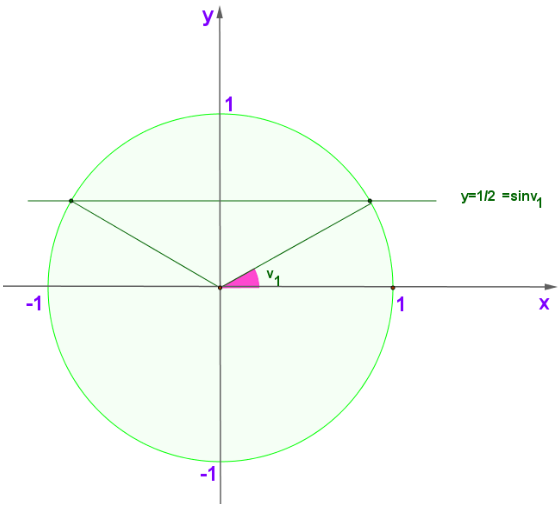
Vi ritar nu egen enhetscirkeln och linjen $y = 1/2$. Linjen skär cirkeln i två punkter som har samma $y-$koordinat.



Dags att förena origo med respektive punkt för att hitta vinklar av intresse. Obs: i denna kurs fokuserar vi bara på vinklar som är $v \geq 0^\circ$.

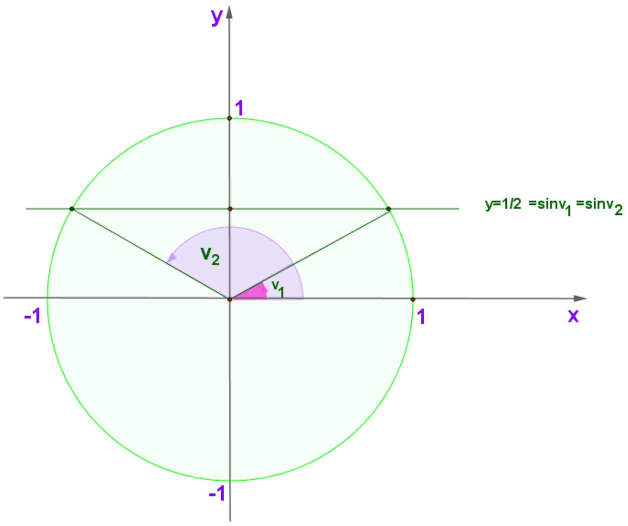
Bilden ger oss den första vinkeln som uppfyller ekvationen $\sin v = 1/2$ och betecknas $v = v_1$.

Vi kan även se att vinkeln $v = v_1 + 360^\circ$ ger oss samma punkt på randen och även $v = v_1 + n \cdot 360^\circ$ ger samma punkt, där n är ett heltal.



På motsvarande sätt fortsätter vi förena origo med den andra skärningspunkten.

Bilden ger oss den adra vinkeln som uppfyller ekvationen $\sin v = 1/2$ och betecknas $v = v_2$.



Bilden visar tydligt samband mellan respektive v_1 och v_2, $v_2 = 180^\circ - v_1$.

Vi kan även se att vinkeln $v = v_2 + 360^\circ$ ger oss samma punkt på randen och även $v = v_2 + n \cdot 360^\circ$ ger oss samma punkt på randen , där n är ett heltal.

Vinkeln $v = v_1$ ligger i den första kvadranten och vinkeln $v = v_2$ ligger i den andra kvadranten. Obs: kvadranterna räknas moturs.

Så <u>generellt</u> sökes varje lösning för ekvationen $\sin v = y$ precis med samma resonemang som ovan.

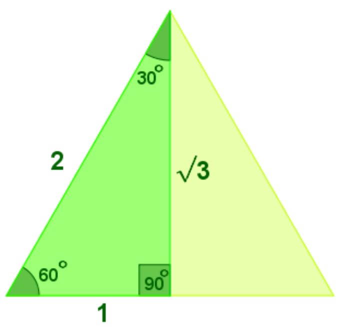
Vi har då samtliga lösningar

$$\sin v = y \Leftrightarrow \begin{cases} v = v_1 + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = v_2 + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z \Leftrightarrow \left[v_2 = 180^\circ - v_1 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} v = v_1 + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 180^\circ - v_1 + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$$

Obs: Beteckningen $\in$ läses som tillhör. Z betecknar mängden av hela tal (från det tyska ordet Zahlen (tal)). $n \in Z$ läses "n tillhör heltal"

$$\sin v = y \Leftrightarrow \begin{cases} v = v_1 + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 180^\circ - v_1 + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$$

Ok! Så vi vet i vilka kvadranter finns lösninagar till $\sin v = 1/2$. Det är dags att ta fram lämplig triangel för att hitta exakta lösningar.



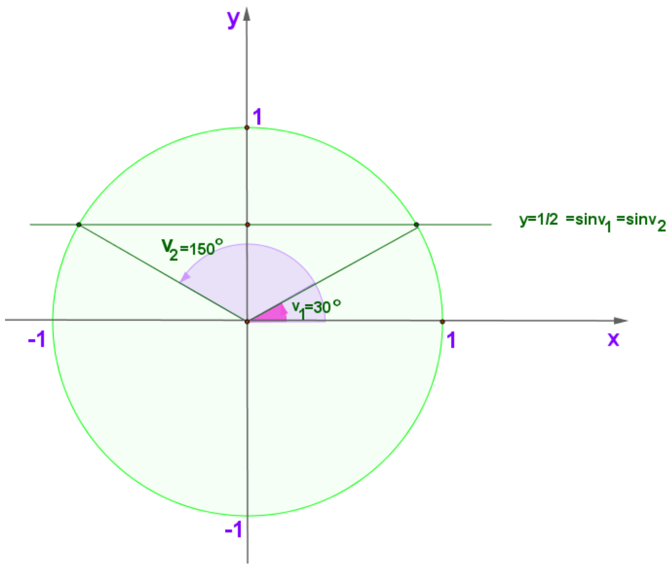
$$\sin v = \frac{1}{2} = \frac{motstående \ \ katet}{hypotenusan}.$$

Alltså bilden ger oss direkt <u>en</u> lösning i första kvadranten, vinkeln $v = v_1 = 30^\circ$.

Samtliga lösningar blir då $\sin v = 1/2 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 180^\circ - 30^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} v = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 150^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$

och den minsta positiva vinkeln som uppfyller ekvationen är $v = 30^\circ$.

Svar: $\begin{cases} v = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 150^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$. Svaret i radianer ges av $\begin{cases} v = \dfrac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \\ eller \\ v = \dfrac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \end{cases}, n \in Z$.



Obs: i denna kurs (764G08) kommer vi oftast söka just den minsta positiva eller 0° (graders) vinkeln.

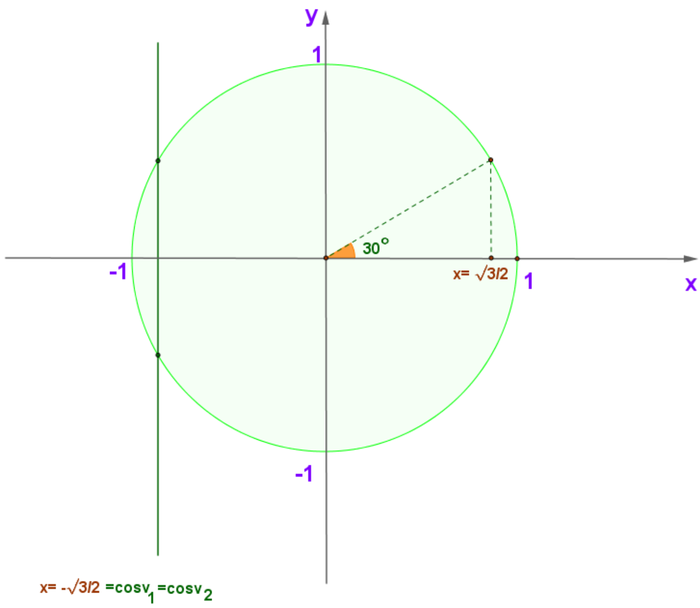
Exempel 3: Lös ekvationen $\cos v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lösning :

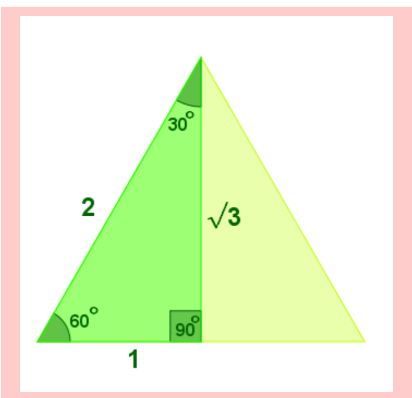
Vi börjar med att titta på en enhetscirkel nedan på motsvarande sätt som i exempel 1. Vi vet att varje punkt som ligger på randen av cirkeln har $x-$koordinaten som motsvarar värdet av $\cos v$. Alltså vi konstaterar att $x = \cos v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Obs: vinkeln v utgår alltid från positiva $x-$axeln!

Vi ritar linjen $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Linjen skär cirkeln i två punkter som har samma $x-$koordinat.



Obs: denna gång är $x < 0$.



Därför börjar vi med att söka en lösning till $\cos v = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (alltså positivt värde), för att sedan använda oss av symmetrirer.

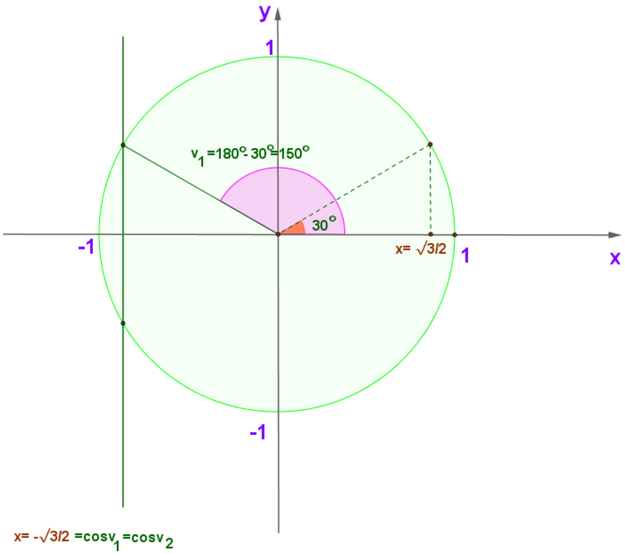
Vi hittar vi en lösning mha triangeln som är $v = 30^\circ$.

Vi placerar denna vinkel i enhetscireln för att lätt konstatera vilka SYMMETRIER ska användas.

Dags att förena origo med respektive skärningspunkt för att hitta vinklar av intresse. Obs: i denna kurs fokuserar vi bara på vinklar som är $v \geq 0^\circ$.

Enkla trigonometriska ekvationer för 764G08
By Malgorzata Wesolowska

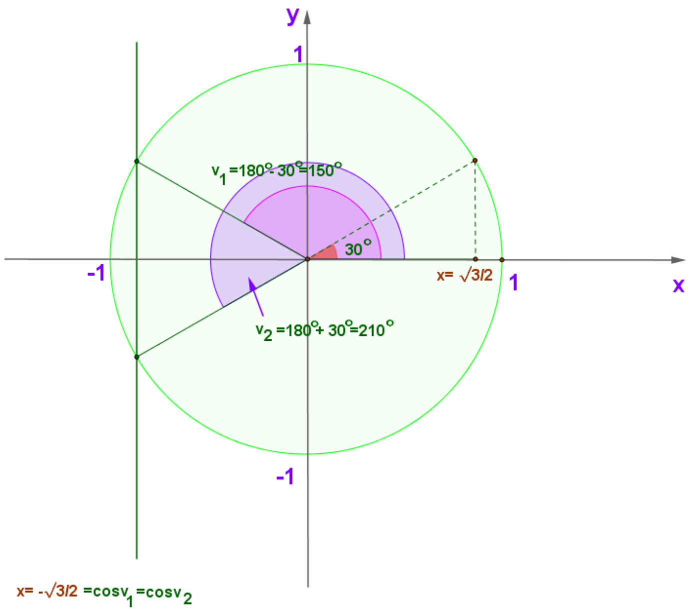
Bilden ger oss den första vinkeln som uppfyller ekvationen $\cos v = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ som betecknas $v = v_1$. Vi kan även se att vinkeln $v = v_1 + 360^\circ$ ger oss samma punkt på randen och även $v = v_1 + n \cdot 360^\circ$ ger samma punkt, där n är ett heltal.



Utgå från enhetscirkeln $v = v_1 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

På motsvarande sätt fortsätter vi förena origo med den andra skärningspunkten.

Utgå från enhetscirkeln $v = v_2 = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$.



<u>Samtliga</u> lösningar blir då

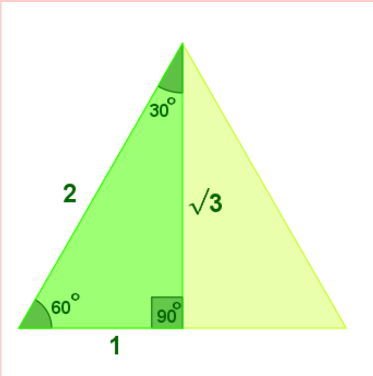
$$\cos v = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 150^\circ + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 210^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$$

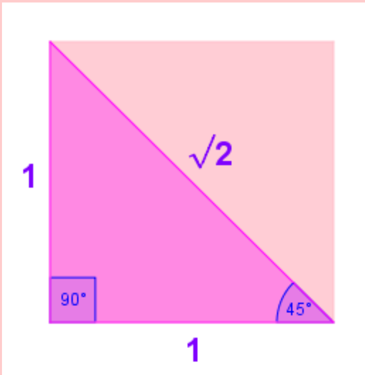
och den minsta <u>positiva</u> vinkeln som uppfyller ekvationen är $v = 150^\circ$.

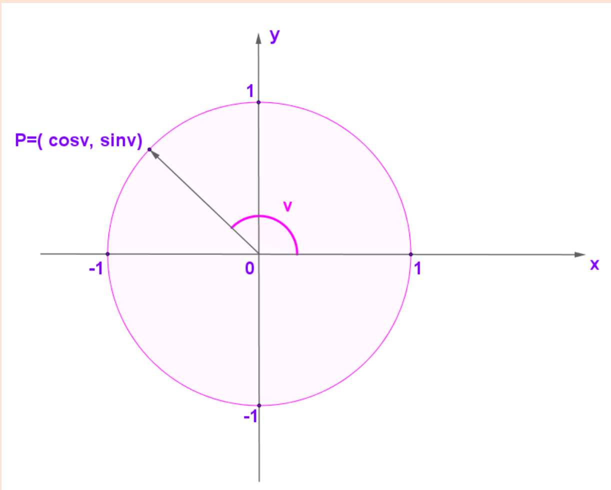
Svar: $\begin{cases} v = 150^\circ + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 210^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$. Svaret i radianer ges av $\begin{cases} v = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \\ eller \\ v = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi \end{cases}, n \in Z$.

- Summa summarum

Två speciella tringlar vi behöver att tänka med (obs: vi jobbar inte med miniränare):







Samtilga lösningar till ekvationerna är:

- $\cos v = x \Leftrightarrow \begin{cases} v = v_1 + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 360^\circ - v_1 + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$ eller $\cos v = x \Leftrightarrow \begin{cases} v = v_1 + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = -v_1 + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$

- $\sin v = y \Leftrightarrow \begin{cases} v = v_1 + n \cdot 360^\circ \\ eller \\ v = 180^\circ - v_1 + n \cdot 360^\circ \end{cases}, n \in Z$

Enkla trigonometriska ekvationer för 764G08
By Malgorzata Wesolowska

Uppgifter:

Sök den minsta positiva vinkeln x som löser ekvationen med hjälp av enhetscirkeln och lämpligt val av speciella trianglar. Svara exakt.

1. a) $\cos x = 0$ b) $\cos(3x+45^\circ) = 0$ c) $\cos(3x+\pi/2) = 0$
2. a) $\cos x = 1/2$ b) $\cos(2x-60^\circ) = 1/2$
3. a) $\cos x = -0{,}5$ b) $\cos(2x+60^\circ) = -0{,}5$ c) $4\cos(3x-\pi/4) = -2$
4. a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. a) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\sin(2x+15^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
6. a) $\sin x = -\frac{1}{2}$ b) $\sin(2x-50^\circ) = -\frac{1}{2}$ c) $\sin(2x-20^\circ) = -0{,}5$
7. a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin(3x+60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
8. a) $2\sin x = 1$ b) $2\sin(2x+\pi/3) = 1$

Svar:

Observera att varje ekvation ovan har oändligt många lösningar. Vi kommer att jobba med liknande ekvationer i nästa kurs 764G07 och då kommer vi leta efter alla lösningar eller lösningar i ett visst intervall.

1. a) $x = 90^\circ$ b) $x = 15^\circ$ c) $x = \pi/3$
2. a) $x = 60^\circ$ b) $x = 60^\circ$
3. a) $x = 120^\circ$ b) $x = 30^\circ$ c) $x = 11\pi/36$
4. a) $x = 30^\circ$ b) $x = 150^\circ$ c) $x = 45^\circ$ d) $x = 135^\circ$
5. a) $x = 45^\circ$ b) $x = 15^\circ$
6. a) $x = 210^\circ$ b) $x = 130^\circ$ c) $x = 115^\circ$
7. a) $x = 60^\circ$ b) $x = 20^\circ$ c) $x = 20^\circ$
8. a) $x = \pi/6$ b) $x = \pi/4$