Extramaterial till kursen Linjär algebra 764G01

Utdrag ur Forsling och Neymark, MATEMATISK ANALYS En variabel

Ett avsnitt om

Trigonometri och trigonometriska funktioner

följt av ledningar samt svar till testövningar

och ett kort avsnitt om

Polynomekvationer

följt av ledningar samt svar till testövningar

2.4 Trigonometri och trigonometriska funktioner

Trigonometri i en rätvinklig triangel

I skolmatematiken börjar man med att definiera

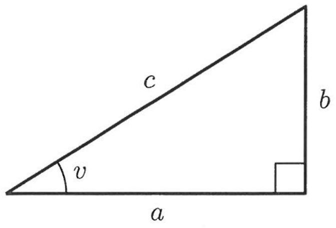

Fig 2.26

$$\cos v = \frac{a}{c}, \quad \textbf{cosinus} \text{ för } v \tag{2.27}$$

$$\sin v = \frac{b}{c}, \quad \textbf{sinus} \text{ för } v \tag{2.28}$$

$$\tan v = \frac{b}{a}, \quad \textbf{tangens} \text{ för } v \tag{2.29}$$

och (ibland)

$$\cot v = \frac{a}{b}, \quad \textbf{cotangens} \text{ för } v \tag{2.30}$$

då v är en **vinkel** i en **rätvinklig** triangel med sidorna a, b och c längdenheter enligt fig 2.26.

Vinkeln v mäts då vanligen i **grader** ($^\circ$) så att t ex en rät vinkel är 90°.

Här brukar man också utelämna parenteserna och t ex skriva $\cos v$ i stället för $\cos(v)$, om inga oklarheter kan uppkomma.

För sidorna i triangeln i fig 2.26 gäller som bekant Pythagoras sats

$$a^2 + b^2 = c^2$$

och med hjälp av den kan vi bestämma sidor i trianglarna i fig 2.27 (a) och fig 2.27 (b) och med dem räkna ut exakta värden på $\cos v$, $\sin v$, $\tan v$ och $\cot v$ då $v = 45^\circ$ resp $v = 30^\circ$ och $v = 60^\circ$.

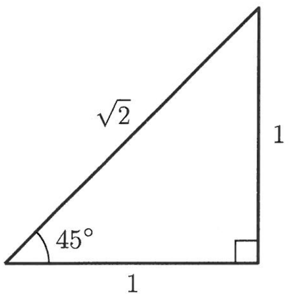

Fig 2.27 (a)

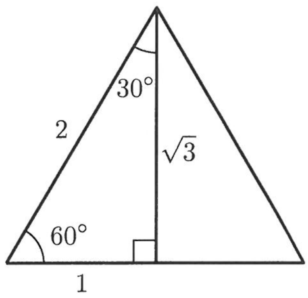

Fig 2.27 (b)

Det ger följande värden:

$$\begin{array}{llll}
\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2} & \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \cot 30^\circ = \sqrt{3} \\
\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \tan 45^\circ = 1 & \cot 45^\circ = 1 \\
\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} & \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \tan 60^\circ = \sqrt{3} & \cot 60^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}
\end{array}$$

Testövningar

2.26 Räkna ut $\cos v$, $\sin v$ och $\tan v$ för vinkeln v i triangeln i fig 2.26 på sid 91 om

(a) $a = 3$ cm och $b = 4$ cm (b) $a = 5$ cm och $c = 6$ cm

2.27 En 5 m lång stege står på plan mark lutad mot en lodrät vägg. Hur högt över marken når stegen då vinkeln som den bildar med markplanet är

(a) 60°? (b) 45°? (c) 30°?

2.28 Hur högt över marken når stegen i testövning 2.27, om den är l m lång och bildar vinkeln v

(a) med markplanet? (b) med väggen?

Trigonometri via enhetscirkeln

När vi vill utvidga definitionen av $\cos v$, $\sin v$, $\tan v$ och $\cot v$ till andra vinklar v än vinklar mellan 0° och 90°, är det enklare att göra det via **enhetscirkeln** med radie 1 och medelpunkt i O = origo i ett ortonormerat koordinatsystem i ett plan. Denna cirkel har ekvationen

$$x^2 + y^2 = 1$$

enligt den allmänna ekvationen (1.24) för en cirkel på sid 26.

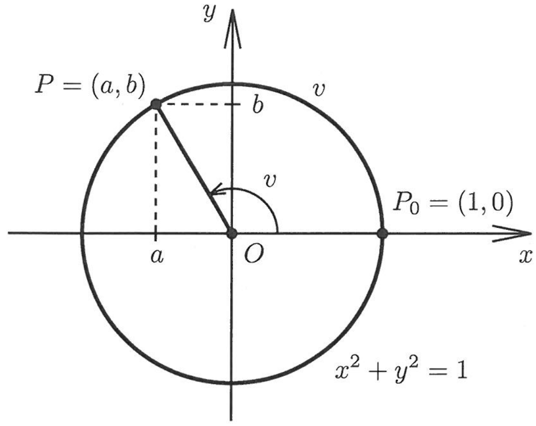

Fig 2.28

Vi utgår då från punkten $P_0 = (1, 0)$ och för varje punkt $P = (a, b)$ på enhetscirkeln mäter vi vinkeln v mellan sträckorna OP_0 och OP i **positiv** led d v s **moturs**.

Man brukar då mäta v i s k **radianer** i stället för grader. Det betyder att v är längden av bågen längs enhetscirkeln från P_0 till P. Men vi kan också mäta vinkeln i **negativ** led (**medurs**) från P_0 till P och då sätts $v = -$längden av denna båge längs enhetscirkeln. Dessutom kan vi lägga till ett eller flera varv runt enhetscirkeln i positiv eller negativ led. Eftersom omkretsen av av en cirkel med radie 1 är 2π, får vi alla värden på vinkeln v genom att

$$v = v_0 + 2\pi n \quad \text{med heltal } n$$

där v_0 t ex är längden av bågen från P_0 till P i positiv led.

Omvänt kan man visa att varje reellt tal v svarar mot en punkt $P = (a, b)$ på enhetscirkeln på detta sätt.

Eftersom ett varv runt enhetscirkeln från P_0 till P_0 i positiv led ger vinkeln 2π mätt i radianer och $360°$ mätt i grader, så gäller att

$$1 \text{ radian} \quad \text{svarar mot} \quad \frac{360}{2\pi} \approx 57.296°$$

och omvänt att

$$1° \quad \text{svarar mot} \quad \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0.017453 \quad \text{mätt i radianer}$$

Speciellt svarar

$$30° \text{ mot } \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \quad \text{och} \quad 60° \text{ mot } \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{samt} \quad 45° \text{ mot } \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \quad \text{och} \quad 90° \text{ mot } \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}.$$

Om

$$0 < v < \frac{\pi}{2},$$

ligger motsvarande punkt $P = (a, b)$ på enhetscirkeln i **första kvadranten** dvs $a > 0$ och $b > 0$. v är då en vinkel i en rätvinklig triangel med sidorna a, b och 1 i fig 2.29. Enligt definitionerna i (2.27) och (2.28) gäller då att

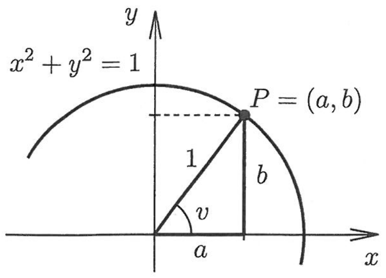

Fig 2.29

$$\cos v = a \qquad \text{och} \qquad \sin v = b \tag{2.31}$$

och därmed enligt (2.29) och (2.30) att

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \qquad \text{och} \qquad \cot v = \frac{\cos v}{\sin v}. \tag{2.32}$$

För varje reellt tal v kan vi nu **definiera** $\cos v$, $\sin v$, $\tan v$ och $\cot v$ genom (2.31) och (2.32), då $P = (a, b)$ är motsvarande punkt på enhetscirkeln enligt fig 2.28 på sid 93 med med inskränkningen att $\tan v$ bara är definierat om $\cos v \neq 0$ och $\cot v$ bara är definierat om $\sin v \neq 0$.

Speciellt får vi följande tabell för några vanliga vinklar v:

v	$\cos v$	$\sin v$	$\tan v$	$\cot v$
0	1	0	0	ej def
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	ej def	0

Testövningar

2.29 Bestäm $\cos v$, $\sin v$, $\tan v$ och $\cot v$ med hjälp av enhetscirkeln då

(a) $v = -\frac{\pi}{6}$ (b) $v = \frac{2\pi}{3}$ (c) $v = \pi$ (d) $v = \frac{5\pi}{4}$

Svar till testövningar och övningar

2.26 (a) $\cos v = \dfrac{3}{5}$, $\sin v = \dfrac{4}{5}$, $\tan v = \dfrac{4}{3}$ $(c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5)$

(b) $\cos v = \dfrac{5}{6}$, $\sin v = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$, $\tan v = \dfrac{\sqrt{11}}{5}$ $(b = \sqrt{c^2 - a^2})$

2.27 (a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ m ≈ 4.33 m (b) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ m ≈ 3.54 m (c) 2.5 m

2.28 (a) $l \sin v$ m (b) $l \cos v$ m

2.29 (a) $\cos v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin v = -\dfrac{1}{2}$, $\tan v = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot v = -\sqrt{3}$

Allmänna polynomekvationer

En allmän **polynomekvation** är en ekvation av formen

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0$$

där vänsterledet är ett **polynom** med reella tal c_n, c_{n-1}, ..., c_1, c_0 som **koefficienter**. Polynomet har **grad** n om $c_n \neq 0$.

Det finns metoder för att lösa allmänna ekvationer av grad tre eller fyra, men de är knappast praktiskt användbara. För ekvationer med grad större än fyra finns det inte några allmänna lösningsmetoder. För ekvationer med grad större än två måste vi därför nöja oss med att finna lösningar genom prövning och använda s k **polynomdivision** för att successivt få ekvationer med allt lägre grad.

Divisionsalgoritmen för polynom illustreras i följande exempel:

Exempel 1.13 Vi skall dividera $x^3 + x^2 - 3x$ med $x - 1$. Med en variant av "trappmetoden" eller "liggande stolen" får vi

$$
\begin{array}{r|ccccccccc|l}
 & & x^2 & + & 2x & - & 1 & & & \\
\cline{2-10}
 & & x^3 & + & x^2 & - & 3x & & & & \multicolumn{1}{|l|}{x-1} \\
\cline{11-11}
-(x-1)\cdot\underline{x^2}: & - & x^3 & + & x^2 & & & & & \\
\cline{2-10}
 & & & & 2x^2 & - & 3x & & & \\
-(x-1)\cdot\underline{2x}: & & & - & 2x^2 & + & 2x & & & \\
\cline{4-10}
 & & & & & - & x & & & \\
-(x-1)\cdot(\underline{-1}): & & & & & & x & - & 1 & \\
\cline{6-10}
 & & & & & & & - & 1 &
\end{array}
$$

De understrukna termerna bildar tillsammans kvoten x^2+2x-1 på översta raden och på nedersta raden står resten -1 så att

$$x^3+x^2-3x=(x-1)(x^2+2x-1)-1\,.$$

(När man som här dividerar med ett polynom med låg grad, kan man också göra räkningarna i en följd så här:

$$\begin{aligned} x^3+x^2-3x &= x^3-x^2+2x^2-3x= \\ &=(x-1)x^2+2x^2-2x-x= \\ &=(x-1)(x^2+2x)-x+1-1= \\ &=(x-1)(x^2+2x-1)-1\,. \end{aligned}$$

Med litet vana kan man utföra mellanleden i huvudet.) □

Allmänt kan man med polynomdivision visa följande sats:

Sats 1.1

För alla polynom $p(x)$ och $q(x)$ finns polynom $k(x)$ och $r(x)$ sådana att

$$p(x)=q(x)k(x)+r(x)$$

där ***kvoten*** *$k(x)$ och* ***resten*** *$r(x)$ bestäms entydigt av $p(x)$ och $q(x)$, om dessutom $r(x)$ har mindre grad än $q(x)$.*

Speciellt är polynomet $p(x)$ **delbart** med polynomet $q(x)$ om resten $r(x)=0$ så att $p(x)=q(x)k(x)$.

Om $q(x)=x-c$ med ett reellt tal c, får vi med polynomdivision

$$p(x)=(x-c)k(x)+r\,,$$

där $k(x)$ är ett polynom och resten r är ett polynom med grad 0 dvs en konstant. Då följer att

$$\begin{aligned} p(c)=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (c-c)k(c)+r=0 \quad \Longleftrightarrow \quad r=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad p(x)=(x-c)k(x)\,. \end{aligned}$$

Detta visar följande sats:

Sats 1.2 Faktorsatsen

En polynomekvation $p(x)=0$ har ett tal c som en lösning (rot) om och endast om polynomet $p(x)$ är delbart med $x-c$.

Exempel 1.14 Vi skall bestämma alla reella rötter till ekvationen

$$x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2 = 0\,.$$

Genom att pröva ser vi att $x = -1$ är en rot. Vi dividerar polynomet $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2$ med $x - (-1) = x + 1$ (gör det som övning!) och får ekvationen

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2 &= (x+1)(x^3 + x + 2) = 0 \\ \iff \quad & x + 1 = 0 \quad \text{eller} \quad x^3 + x + 2 = 0\,. \end{aligned}$$

Genom att pröva ser vi att $x^3+x+2 = 0$ också har en rot $x = -1$. Vi dividerar igen med $x+1$ (gör det också som övning!) och får ekvationen

$$\begin{aligned} x^3 + x + 2 &= (x+1)(x^2 - x + 2) = 0 \\ \iff \quad & x + 1 = 0 \quad \text{eller} \quad x^2 - x + 2 = 0\,. \end{aligned}$$

Här ser vi att $x^2 - x + 2 = 0$ inte har någon reell rot. Visa det! Den enda reella roten till ekvationen $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2 = 0$ är alltså $x = -1$ och om vi kombinerar räkningarna får vi faktoruppdelningen

$$x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2 = (x+1)^2(x^2 - x + 2)\,.$$

□

Vi säger att $x = -1$ är en **dubbelrot** till ekvationen i exempel 1.14, eftersom polynomet $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2$ där är delbart med $(x+1)^2$ (men inte med $(x+1)^3$).

Allmänt säger vi att ett tal c är en rot med **multiplicitet** m till en polynomekvation $p(x) = 0$, ifall m är ett heltal > 0 sådant att $p(x)$ är delbart med $(x - c)^m$ men inte med $(x - c)^{m+1}$. En dubbelrot har alltså multipiciteten 2. En **enkelrot** är en rot med multipliciteten 1.

Testövningar

1.49 Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer:

(a) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ (b) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = 0$

1.50 Bestäm en polynomekvation som har enkelrötterna $x = 4$ och $x = 2$ samt dubbelroten $x = -3$ och har så låg grad som möjligt.

Ledningar/tips till testövningarna

1.49 (a) En lösning är $x = 2$ ty $2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$
Polynomdivision ger $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x-2)(x^2 - x - 6)$
$x^2 - x - 6 = 0$ ger övriga lösningar $x = ?$ och $x = ?$

(b) En lösning är $x = 1$ ty $1^4 - 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 2 = 0$
Polynomdivision ger
$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = (x-1)(x^3 - x^2 + 2x - 2)$
$x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2) = 0$
ger övriga lösningar $x = ?$

1.50 En polynomekvation $p(x) = 0$ har enkelrötterna $x = 4$ och $x = 2$ samt dubbelroten $x = -3$ om och endast om $p(x)$ är delbart med $x - 4$, $x - 2$ och $(x+3)^2$. Ett polynom $p(x)$ med lägsta möjliga grad är då

$$p(x) = (x-4)(x-2)(x+3)^2 = x^4 - 19x^2 - 6x + 72$$

Svar till testövningar och övningar

1.49 (a) $x = 3$, $x = 2$ och $x = -2$ (b) $x = 1$ (dubbelrot)

1.50