Mer om faktorsatsen, polynomdivison, polynomekvationer med tips, exempel och uppgifter

Exempel 1:

Visa att polynomet

a) $f(x) = x^3 + 3x - 14$ har en faktor $x - 2$

b) $g(x) = x^5 + 32$ har en faktor $x + 2$

c) $h(x) = x^3 - 20x + 35$ ger resten 10 vid division med $x + 5$

a) $f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2 - 14 = 0$ och $f(x)$ har en faktor $x - 2$ enligt faktorsatsen.

b) Lägg märke till att $x + 2 = x - (-2)$
$g(-2) = (-2)^5 + 32 = 0$ och $g(x)$ har en faktor $x - (-2) = x + 2$ enligt faktorsatsen.

c) $h(-5) = (-5)^3 - 20 \cdot (-5) + 35 = 10$
Resten är alltså 10 enligt restsatsen.

Uppgifterna:

A 1515 Sant eller falskt?

a) $x^3 - 3x - 2$ är delbart med $x - 2$

b) $x^3 + x - 2$ har en faktor $x + 1$

c) Polynomet $f(x) = x^5 + 5x - 1$ ger resten 5 vid division med $x - 1$

d) Polynomet $g(x) = 3x^4 + 100x^2 + 4000x$ ger resten 0 vid division med $x + 10$

1516 Beräkna resten då polynomet $f(x) = x^3 + x - 2$ delas med

a) $x - 2$
b) $x - 1$
c) $x + 1$
d) $x - i$

1517 Beräkna resten då polynomet $f(z) = z^3 - 2z^2 + z - 1$ delas med

a) $z - 2$
b) $z + 1$
c) $z - 2i$
d) $z + i$

1518 Visa att polynomet

a) $f(x) = x^5 + 4x - 5$ har en faktor $x - 1$

b) $g(x) = x^6 + 2x^5 + x^3 + x + 3$ har en faktor $x + 1$

c) $p(x) = x^7 - 128$ har en faktor $x - 2$

d) $h(x) = x^4 + 4x^3 - 14x^2 - 36x + 45$ har en faktor $x + 3$

B 1519 Visa att polynomet

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ är delbart med $x - 3$

b) $p(x) = x^{47} - 5x^{73} + 4x^{11}$ är delbart med $x + 1$

c) $h(x) = x^2 + 4$ är delbart med $x - 2i$ och $x + 2i$

d) $g(x) = x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 34x + 12$ är delbart med minst en av faktorerna $x + 5$, $x - 2$ och $x - 3$

1520 Bestäm talet k så att polynomet

a) $3x^3 + x^2 + 2kx + 4$ blir delbart med $x - 1$

b) $x^3 + kx^2 - kx + 9$ får en faktor $x + 3$

c) $x^3 + k^2x^2 - 2kx - 16$ blir delbart med $x - 2$

d) $x^2 - 7x + 12$ får en faktor $x - k$

C 1521 Vilket tredjegradspolynom ger resten 4 och kvoten $x^2 + 3x + 5$ vid division med $x - 3$?

1522 När är $(x - a)$ en faktor till polynomet

a) $x^2 - 2ax + 4$

b) $x^3 - 6ax^2 + 8a^2x - 3a^3$?

Svar:

1515 a) sant b) falskt c) sant d) sant
a) $2^3 - 3 \cdot 2 - 2 = 0$
Polynomet är delbart med $x - 2$
b) $(-1)^3 - 1 - 2 = -4$
Polynomet är inte delbart med $x - (-1) = x + 1$
(Resten blir -4)

1516 a) 8 b) 0 c) -4 d) -2

1517 a) 1 b) -5 c) $7 - 6i$ d) 1
d) $f(-i) = (-i)^3 - 2i^2 - i - 1 = i + 2 - i - 1 = 1$
Resten är 1.

1518 a) $f(1) = 0$ c) $p(2) = 0$
b) $g(-1) = 0$ d) $h(-3) = 0$

1519 a) $f(3) = 0$
b) $p(-1) = 0$
c) $h(2i) = 0$ $h(-2i) = 0$
d) $g(-5) = 2632$ $g(2) = 0$ $g(3) = 0$

1520 a) $k = -4$ c) $k = 2$ eller $k = -1$
b) $k = 3/2$ d) $k = 3$ eller $k = 4$
b) $(-3)^3 + k \cdot (-3)^2 - k \cdot (-3) + 9 = 0$
$-27 + 9k + 3k + 9 = 0$
$12k = 18$
$k = 3/2$

1521 $x^3 - 4x - 11$
Polynomet är
$(x^2 + 3x + 5)(x - 3) + 4 = x^3 - 4x - 11$

1522 a) $a = \pm 2$ b) alla a

Mer om faktorsatsen, polynomdivison, polynomekvationer med tips, exempel och uppgifter

Exempel 2: Utför divisionen $\frac{2x^3-3x^2-27}{x-3}$ samt ange kvoten och eventuell rest.

Lösning:

$$
\begin{array}{rl}
2x^2+3x+9 & \\
\hline
2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & \big|\, x-3 \\
-(2x^3-6x^2) & \\
\hline
3x^2+0\cdot x & \\
-(3x^2-9x) & \\
\hline
9x-27 & \\
-(9x-27) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Svar: $Kvoten\ är\ \ 2x^2+3x+9.\ Resten\ är\ \ 0.$

Exempel 3:

Följ nu hela processen på hur man utför själva divisionen 😊 nedan visas små tanke steg, observera noga vad som är nytt i redovisningen steg efter steg. Notationen följer tanken.

Steg 1

$$
\begin{array}{rl}
2x^2 & \\
\hline
2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & \big|\, x-3
\end{array}
$$

Starta divisionen med att välja ett uttryck så att detta uttryck multiplicerat med ger som första term .

Steg 2

$$
\begin{array}{rl}
2x^2 & \\
\hline
2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & \big|\, x-3 \\
2x^3-6x^2 &
\end{array}
$$

där $2x^2(x-3)=2x^3-6x^2$

Steg 3

$$
\begin{array}{rl}
2x^2 & \\
\hline
2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & \big|\, x-3 \\
-(2x^3-6x^2) &
\end{array}
$$

Steg 4

$$
\begin{array}{rl}
2x^2 & \\
\hline
2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & \big|\, x-3 \\
-(2x^3-6x^2) & \\
\hline
\end{array}
$$

Steg 5

$$
\begin{array}{rl}
2x^2 & \\
\hline
2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & \big|\, x-3 \\
-(2x^3-6x^2) & \\
\hline
3x^2 &
\end{array}
$$

Steg 6

$$
\begin{array}{rl}
2x^2 & \\
\hline
2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & \big|\, x-3 \\
-(2x^3-6x^2) & \\
\hline
3x^2+0\cdot x &
\end{array}
$$

Steg 7

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+3x & \\ 2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & x-3 \\ -(2x^3-6x^2) & \\ \hline \quad 3x^2+0\cdot x & \end{array}$$

Steg 8

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+3x & \\ 2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & x-3 \\ -(2x^3-6x^2) & \\ \hline \quad 3x^2+0\cdot x & \\ \quad 3x^2-9x & \\ \hline \end{array}$$

där $3x\,(x-3) = 3x^2-9$

Steg 9

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+3x & \\ 2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & x-3 \\ -(2x^3-6x^2) & \\ \hline \quad 3x^2+0\cdot x & \\ \quad -(3x^2-9x) & \\ \hline \end{array}$$

Steg 10

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+3x & \\ 2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & x-3 \\ -(2x^3-6x^2) & \\ \hline \quad 3x^2+0\cdot x & \\ \quad -(3x^2-9x) & \\ \hline \qquad 9x & \end{array}$$

Steg 11

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+3x & \\ 2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & x-3 \\ -(2x^3-6x^2) & \\ \hline \quad 3x^2+0\cdot x & \\ \quad -(3x^2-9x) & \\ \hline \qquad 9x-27 & \end{array}$$

Steg 12

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+3x+9 & \\ 2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & x-3 \\ -(2x^3-6x^2) & \\ \hline \quad 3x^2+0\cdot x & \\ \quad -(3x^2-9x) & \\ \hline \qquad 9x-27 & \end{array}$$

Steg 13

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+3x & \\ 2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & x-3 \\ -(2x^3-6x^2) & \\ \hline \quad 3x^2+0\cdot x & \\ \quad -(3x^2-9x) & \\ \hline \qquad 9x-27 & \\ \qquad 9x-27 & \\ \hline \end{array}$$

Steg 14

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+3x+9 & \\ 2x^3-3x^2+0\cdot x-27 & x-3 \\ -(2x^3-6x^2) & \\ \hline \quad 3x^2+0\cdot x & \\ \quad -(3x^2-9x) & \\ \hline \qquad 9x-27 & \\ \qquad -(9x-27) & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Mer om faktorsatsen, polynomdivison, polynomekvationer med tips, exempel och uppgifter

Alltså

$$\frac{2x^3-3x^2-27}{x-3}=2x^2+3x+9$$

Svar: $Kvoten\ är\ \ 2x^2+3x+9.\ Resten\ är\ \ 0.$

Uppgifterna:

A 1524 Utför divisionen för hand samt ange kvoten och resten.

a) 3977/41 b) 8489/69

1525 Dividera polynomet med $x-1$ samt ange kvoten och resten.

a) $7x^2+x-8$ b) $4x^3-3x^2-7$

B 1526 För vilka värden på talet k är $x-2$ en faktor till polynomet

a) $x^2-2kx+8$

b) $x^4-kx^3+k^2x-6$?

1527 Bestäm talet k så att polynomet kan skrivas $q(x)\cdot(x+2)$ samt ange $q(x)$.

a) x^2+8x+k c) x^4-4x^2-2x+k

b) x^3+2x^2-3x+k d) x^5+4x+k

1528 Dividera $z^3+iz+1+i$ med $z-i$.

C 1529 Faktorisera fullständigt polynomet

$p(x)=x^3-x^2-10x-8$

genom att leta efter tal a sådana att $p(a)=0$

Svar:

1524 a) kvot = 97 b) kvot = 123
rest = 0 rest = 2

b)
$$\begin{array}{l|l} \quad 123 & \\ 8489 & 69 \\ \underline{69} & \\ 158 & \\ \underline{138} & \\ \ \ 209 & \\ \ \ \underline{207} & \\ \quad\ 2 & \end{array}$$

1525 a) kvot = $7x+8$ b) kvot = $4x^2+x+1$
rest = 0 rest = -6

b)
$$\begin{array}{l|l} 4x^2+x+1 & \\ 4x^3-3x^2-7 & x-1 \\ \underline{4x^3-4x^2} & \\ \qquad\ x^2 & \\ \qquad\ \underline{x^2-x} & \\ \qquad\qquad x-7 & \\ \qquad\qquad \underline{x-1} & \\ \qquad\qquad\ -6 & \end{array}$$

1526 a) $k=3$ b) $k=2\pm i$

1527 a) $k=12$ $q(x)=x+6$
b) $k=-6$ $q(x)=x^2-3$
c) $k=-4$ $q(x)=x^3-2x^2-2$
d) $k=40$ $q(x)=x^4-2x^3+4x^2-8x+20$
b) Polynomet har en faktor $x+2$ om
$(-2)^3+2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+k=0$
$k=-6$
Divisionen $\dfrac{x^3+2x^2-3x-6}{x-2}$ ger kvoten x^2-3

1528 Kvoten blir $z^2+iz-1+i$

1529 $p(x)=(x+2)(x+1)(x-4)$

1534 a) -4, 2 och 5 b) $(x+3)(x-6)^2=0$

1535 a) $x-1$
b) -4
c) $x=1,\ x=-4$ och $x=2$
c) Två rötter är 1 och -4.
$p(x)$ är delbart med $(x-1)(x+4)=x^2+3x-$

$$\frac{p(x)}{x^2+3x-4}=x-2$$

Den tredje roten är 2.

Mer om faktorsatsen, polynomdivison, polynomekvationer med tips, exempel och uppgifter

Exempel:

Ställ upp en tredjegradsekvation som har rötterna

a) $x = -1,\ x = 2$ och $x = 3$ b) $x = -5$ och $x = 7$ (dubbelrot)

a) $(x + 1)(x - 2)(x - 3) = 0$ b) $(x + 5)(x - 7)^2 = 0$

Uppgifterna:

A 1534 a) Vilka rötter har ekvationen $(x + 4)(x - 2)(x - 5) = 0$?

b) Ställ upp en tredjegradsekvation som har en rot $x = -3$ och en dubbelrot $x = 6$.

1535 Polynomet $p(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ är givet.

a) Ange en faktor om $p(1) = 0$.

b) Ange ett nollställe om $x + 4$ är en faktor.

c) Lös ekvationen $p(x) = 0$.

Svar:

1534 a) -4, 2 och 5 b) $(x + 3)(x - 6)^2 = 0$

1535 a) $x - 1$

b) -4

c) $x = 1,\ x = -4$ och $x = 2$

c) Två rötter är 1 och -4.
$p(x)$ är delbart med $(x - 1)(x + 4) = x^2 + 3x - 4$

$$\frac{p(x)}{x^2 + 3x - 4} = x - 2$$

Den tredje roten är 2.

Uppgifter:

1. *Faktorisera så långt som möjligt:* $p^4 - 1$

2. *Faktorisera så långt som möjligt:* $80t^5 - 5t$

3. *Faktorisera så långt som möjligt:* $x^2 + 7x + 10$

4. *Dela upp i så många faktorer som möjligt:* $x^2 + x - 12$

5. *Faktorisera så långt som möjligt:* $2x^2 + 11x + 12$

6. *Faktoruppdela så långt som möjligt:* $3x - 9x^2 + 12$

7. *Faktorisera så långt som möjligt:* $12x + 52x^2 - 40x^3$

8. *Lös ekvationen* $x^3 - 8x^2 + 7x = 0$

9. *Lös ekvationen* $4x^3 - 4x^2 + x = 0$

10. *Lös ekvationen* $8t^2 - 4t^3 = -60t$

11. *Lös ekvationen* $p^2(p+1)-2p(p+1)=15(p+1)$

12. *Lös ekvationen* $(x^2+1)(2x+1)-5(2x+1)=0$

Facit:

1. $(p+1)(p-1)(p^2+1)$

2. $5t(2t+1)(2t-1)(4t^2+1)$

3. $(x+5)(x+2)$

4. $(x+4)(x-3)$

5. $(2x+3)(x+4)$

6. $3(x+1)(4-3x)$

7. $4x(3-2x)(1+5x)$

8. $x=0$ *eller* $x=1$ *eller* $x=7$

9. $x=0$ *eller* $x=1/2$

10. $t=0$ *eller* $t=-3$ *eller* $t=5$

11. $p=-3$ *eller* $p=-1$ *eller* $p=5$

[Ledning: Bryt ut (p+1)]

12. $x=-2$ *eller* $x=-1/2$ *eller* $x=2$
[Ledning: Bryt ut (2x+1)]