1.3 Kvadratkomplettering

Om vi utvecklar $(x + a)^2$ så får vi att

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Det betyder att

$$x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2.$$

Vi kan därför skriva alla uttryck på formen $x^2 + 2ax$ som $(x + a)^2 - a^2$. Vi säger att vi gör en *kvadratkomplettering*. Observera att talet a är halva koefficienten framför x-termen.

Exempel 1.9

Kvadratkomplettera uttrycket $x^2 + 4x$.

Vi använder formeln ovan och får att $x^2 + 4x = x^2 + 2 \cdot 2x$ kvadratkompletteras som

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 2^2 = (x + 2)^2 - 4.$$

Notera att halva koefficienten framför x-termen är 2. $(4 / 2 = 2)$

Exempel 1.10
Kvadratkomplettera uttrycket $x^2 + 4x + 3$.

Vi använder resultatet från föregående exempel där

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 2^2 = (x + 2)^2 - 4.$$

Kvadratkomplettering av detta uttryck blir då

$$x^2 + 4x + 3 = [(x + 2)^2 - 4] + 3 = (x + 2)^2 - 1.$$

Då en kvadrat alltid är ≥ 0 måste

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1 \geq 0 - 1 = -1,$$

dvs

$$x^2 + 4x + 3 \geq -1$$

för alla värden på x. Talet -1 är alltså det minsta värdet $x^2 + 4x + 3$ kan anta och kallas därför ett *minimum* till $x^2 + 4x + 3$. Minimum uppfylls för $x = -2$.

Övning

1.15 Kvadratkomplettera följande uttryck:

a. $x^2 + 6x$ b. $x^2 - 4x$ c. $x^2 + 7x$

d. $x^2 + 9x + 2$ e. $x^2 - 4x + 4$ f. $x^2 + 7$

1.16 Bestäm minimum för

a. $x^2 - 1$ b. $x^2 + 8x$ c. $x^2 - 6x + 2$.

Exempel 1.11
Kvadratkomplettera uttrycket $2x^2 + 12x$.

Vi börjar med att bryta ut koefficienten framför x^2-termen, vilket ger att

$$2x^2 + 12x = 2(x^2 + 6x).$$

Därefter kvadratkompletterar vi $x^2 + 6x$ och får att

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 3^2 = (x + 3)^2 - 9.$$

Vi sätter slutligen samman detta och får

$$2x^2 + 12x = 2(x^2 + 6x) = 2[(x + 3)^2 - 9] =$$
$$2(x + 3)^2 - 18.$$

Exempel 1.12

Kvadratkomplettera uttrycket $2x - 3x^2$.

Vi börjar med att bryta ut koefficienten framför x^2-termen, vilket ger att

$$2x-3x^2=-3\left(-\frac{2}{3}x+x^2\right)=-3\left(x^2-\frac{2}{3}x\right).$$

Därefter kvadratkompletterar vi $x^2-\frac{2}{3}x$ och får att

$$x^2-\frac{2}{3}x=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}.$$

Vi sätter slutligen samman detta och får att

$$2x-3x^2=-3\left(x^2-\frac{2}{3}x\right)=-3\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right)=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}.$$

Då en kvadrat alltid är ≥ 0 måste

$$2x-3x^2=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\leq 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

dvs

$$2x-3x^2\leq\frac{1}{3}$$

för alla värden på x. Vidare är vänstereledet lika med 1/3 då $x = 1/3$. Alltså är 1/3 det största värdet eller *maximum* till $2x - 3x^2$.

Övning

1.17 Kvadratkomplettera följande uttryck:

a. $2x^2 + 8x$ b. $3x^2 - 4x$ c. $7x^2 + 7x$

d. $2x - x^2$ e. $-3x^2 - 2x$ f. $2 + 8x - 3x^2$

1.18 Bestäm maximum för följande uttryck:

a. $2x - x^2$ b. $2 + 3x - x^2$

c. $-2x^2 + 10x - 12$ d. $5 - 2x - 2x^2$

Svar:

1.15 a. $(x+3)^2-9$ **b.** $(x-2)^2-4$ **c.** $(x+7/2)^2-49/4$ **d.** $(x+9/2)^2-73/4$
e. $(x-2)^2$ **f.** x^2+7

1.16 a. -1 **b.** -16 **c.** -7

1.17 a. $2(x+2)^2-8$ **b.** $3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$ **c.** $7\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$ **d.** $-(x-1)^2+1$
e. $-3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$ **f.** $-3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{22}{3}$

1.18 a. 1 **b.** 17 / 4 **c.** 1 / 2 **d.** 11 / 2