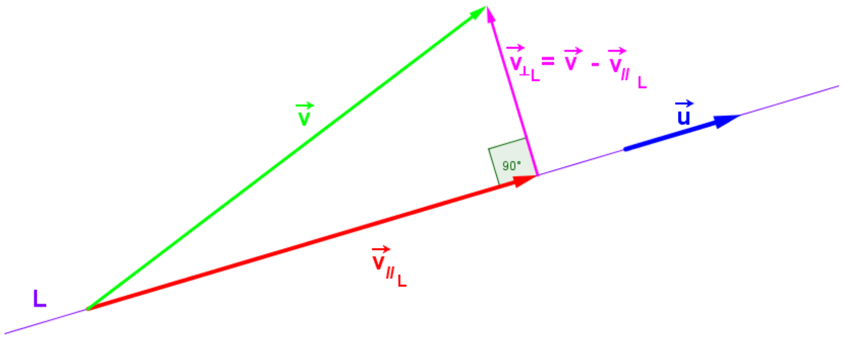
Projektionssatsen vad handlar den om?

Projektionssatsen (alternativ variant från seminarium som är lättare att minnas)

- Låt $\vec{v}$ vara en vektor och L en linje l, där L är parallell med vektor $\vec{u}$



- Då gäller att projektionen av $\vec{v}$ på L ges av $\vec{v}_{/\!/ L} = \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \cdot \vec{u}$

Var noga med att skilja på tecken för skalärprodukt som är " • " och på tecken av en "vanligt" multiplikation som är " · "

Detta är super truper viktigt! ☺

OBS: projektionen av $\vec{v}$ på L är en vektor <u>parallell</u> med L därför beteckningen $\vec{v}_{/\!/ L}$ och vektor $\vec{v}_{\perp L}$ är ortogonal mot L.

Bevis:

Då $\vec{u} /\!/ \vec{v}_{/\!/ L} \Rightarrow \vec{v}_{/\!/ L} = t \cdot \vec{u}$

Vidare är $\vec{v}_{\perp L} = \vec{v} - \vec{v}_{/\!/ L}$ är ortogonal mot $\vec{u}$

alltså $\vec{v}_{\perp L} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{v}_{\perp L} \bullet \vec{u} = 0 \Rightarrow \left(\vec{v} - \vec{v}_{/\!/ L}\right) \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \vec{u} - \vec{v}_{/\!/ L} \bullet \vec{u} = 0$ insättning av $\vec{v}_{/\!/ L} = t \cdot \vec{u}$ ger

$$\vec{v} \bullet \vec{u} - t \cdot \vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \vec{u} = t \cdot \vec{u} \bullet \vec{u} \Leftrightarrow t = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}}$$

Insättning av $t = \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}}$ i $\vec{v}_{/\!/ L} = t \cdot \vec{u}$ ger att $\vec{v}_{/\!/ L} = \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \cdot \vec{u}$

vssv

Projektionssatsen vad handlar den om?

Exempel 1 av 2 :

Antag att $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i en ortonormerad bas i rummet. Bestäm projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$,

Lösning:

Projektionssatsen ger att projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$ ges av $\vec{u}_{//\vec{v}} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \cdot \vec{v}$. ($\vec{v}_{//\vec{u}}$ är beteckning på projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$ som är alltid parallell med $\vec{v}$).

Efter insättningen av respektive $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i projektionssatsen blir

$$\vec{u}_{//\vec{v}} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \cdot \vec{v} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1}{3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

Svar: Projektionen av $\vec{u}$ på $\vec{v}$ är $\vec{u}_{//\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{12}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{4}{11} \end{pmatrix}$.

Obs: att vektor $\vec{u}_{//\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{12}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{4}{11} \end{pmatrix}$ är parallell med $\vec{v}$ och att du kan beräkna nämnaren i projektionssatsen även

med hjälp av $\vec{v} \bullet \vec{v} = |\vec{v}|^2$. Alltså $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \left(\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} \right)^2 = \left(\sqrt{11} \right)^2 = \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = 11$.

→ Ex 2 nästa sida

Projektionssatsen vad handlar den om?

Exempel 2: (P1:11)

Bestäm projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{u}$, uttryckt i $\vec{u}$ om $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ och vinkeln mellan dem är 60°.

Lösning:

Projektionssatsen ger att projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{u}$ ges av $\vec{v}_{//\vec{u}} = \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \cdot \vec{u}$. ($\vec{v}_{//\vec{u}}$ är beteckning på projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{u}$ som är alltid parallell med $\vec{u}$).

Vi vet att $\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}|^2$ och $\vec{v} \bullet \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\alpha$.

Efter insättningen av respektive i projektionssatsen blir projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{u}$ följande

$$\vec{v}_{//\vec{u}} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \cdot \vec{u} = \frac{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\alpha}{|\vec{u}|^2} \cdot \vec{u} = \frac{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\alpha}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{|\vec{v}| \cdot \cos\alpha}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$$

Alltså

$$\vec{v}_{//\vec{u}} = \frac{|\vec{v}| \cdot \cos\alpha}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}.$$

Insättning av respektive $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ och vinkeln mellan dem är 60° ger

$$\vec{v}_{//\vec{u}} = \frac{4 \cdot \cos 60^\circ}{3} \cdot \vec{u} = \left[\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\right] = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{3} \cdot \vec{u} = \frac{2}{3} \cdot \vec{u}.$$

Svar: Projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{u}$, uttryckt i $\vec{u}$ är $\vec{v}_{//\vec{u}} = \dfrac{2}{3} \cdot \vec{u}$.