LINKÖPINGS UNIVERSITET / LiTH
Matematiska institutionen

By Malgorzata Wesolowska

Skalärprodukt uttryckt i koordinater (3-dimensioner)

Vi använder s.k. ortonormerade baser (ON-baser)

- ”orto” står för att basvektorerna är ortogonala
- ”normerade” står för att basvektorerna har längd 1

Vi ska se vad skalärprodukten blir för två vektorer vars koordinaterna vi vet:

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$$

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

Då blir

$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet \vec{v} &= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \bullet (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) = \\
&= u_1\vec{e}_1 \bullet v_1\vec{e}_1 + u_1\vec{e}_1 \bullet v_2\vec{e}_2 + u_1\vec{e}_1 \bullet v_3\vec{e}_3 + \\
&+ u_2\vec{e}_2 \bullet v_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 \bullet v_2\vec{e}_2 + u_2\vec{e}_2 \bullet v_3\vec{e}_3 + \\
&+ u_3\vec{e}_3 \bullet v_1\vec{e}_1 + u_3\vec{e}_3 \bullet v_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 \bullet v_3\vec{e}_3 = u_1v_1\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 + u_1v_2\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 + u_1v_3\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 + \\
&+ u_2v_1\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1 + u_2v_2\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 + u_2v_3\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 + \\
&+ u_3v_1\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1 + u_3v_2\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2 + u_3v_3\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 = \left[\begin{array}{l}
\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_1| \cdot cos(0^\circ) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\
vidare\ på\ mots\ var\ ande\ sätt\ blir \\
\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = 1 \\
\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 = 1 \\
\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| cos(90^\circ) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \\
vidare\ på\ mots\ var\ ande\ sätt\ blir \\
\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 = 0 \\
\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = 0
\end{array}\right] = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3
\end{aligned}$$

Alltså : Skalärprodukten fås genom att parvis multiplicera koordinaterna och sedan addera

Speciellt $\vec{u} \bullet \vec{u} = u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 = u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 = |\vec{u}|^2$ alltså $\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}|^2$.