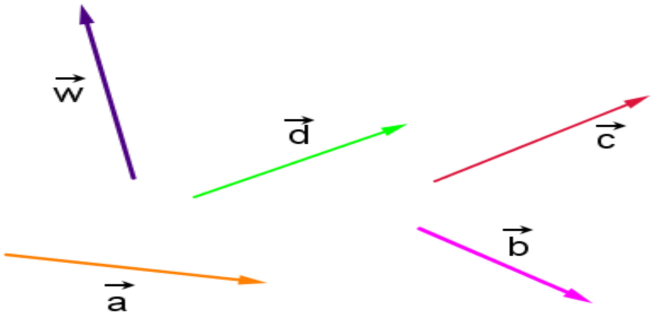
Fö 1 : vad handlar den om?

- Vad är en vektor?
- Två operationer. Vektoraddition och multiplikation med skalär.
- Ortogonal projektion.
- Exempel

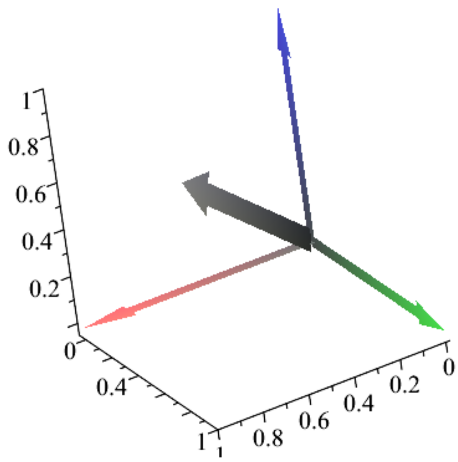


Kommentar:

- Notationen i kursen är av vikt och grundläggande!
  - I boken betecknas en vektor med en bokstav i *fet stil* men vi ska alltid markera vektorer med en vektor *ovanför bokstäverna.*
  - I exempelsamlingen betecknas en vektor med ett *sträck* ovanför bokstäverna men vi ska alltid markera *vektorer med en* vektor *ovanför bokstäverna.*

Vad är en vektor?

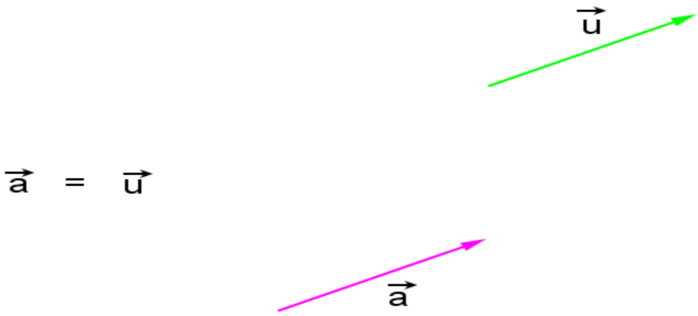
- Latinets "vector "- resande, forslande är ursprunget till ordet *vektor*
- Begreppet *vektor* infördes 1846 av William R. Hamilton (1805-1865). Det uttrycktes som en trippel av tre reella tal, motsvarande en bestämd längd och en bestämd riktninng i rummet.
- Definitonen innebär allmänt att en vektor är en *storhet* som har både en storlek (magnitud) och en *riktning* och som kan representeras som en pil med en viss längd och en viss riktning, men att man inte " bryr "sig om "angreppspunkten" .



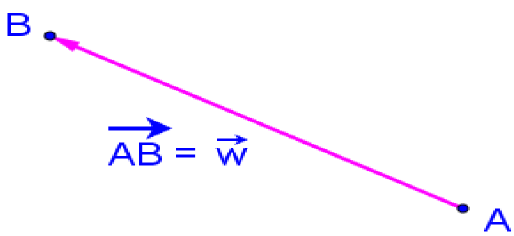
- Den kan alltså translateras och tilldelas en godtyckligt startpunkt. Därför tar man med alla pilar med samma längd och samma riktning i definitionen.

Fö 1 : vad handlar den om?

- Vektorer som har samma längd och samma riktning är lika (ekvivalenta).



- Om A och B är två punkter i planet eller rummet, så är den riktade sträckan $\overrightarrow{AB} = \vec{w}$.



A kallas för en Startpunkt

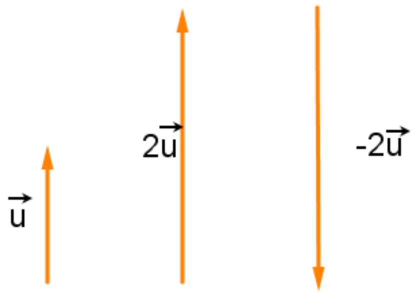
B kallas för en Slutpunkt

- Längden av en vektor kallas även för vektorns storlek och betecknas $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{w}|$.
- En vektor som har längden 1 le (längdenheter) kallas för en *enhetsvektor.*

Multiplikation med skalär

- En vektor kan multipliceras med en *skalär* (ett tal).

- Geometriskt betyder denna multiplikation att vektorns längd förkortas eller förlängs med den multiplicerade faktorn. Om skalären är negativ så byter vektorn riktning så att den pekar i exakt motsatt riktning.



- Vi kommer ofta använda oss av följande formulering (kan inte levas utan!!!):

  Om $\vec{u} \neq \vec{0}$ och $\vec{v}$ är parallell med $\vec{u}$ $(\vec{u} \mathbin{/\!/} \vec{v})$ så finns ett reellt tal så att $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$.

  Observera att "$\lambda =$lambda" är inte markerad med en vektor ovanför. Detta medför att λ är en skalär och inte vektor och tillhör reella tal, alltså $\lambda \in \Re$.
  Obs: två vektorer kallas parallella om de har samma eller motsatt riktning.

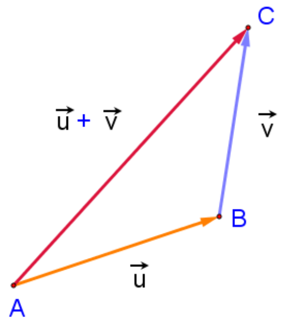
Addition av vektorer

- Summan av två vektorer är resulterande vektorn (diagonal i en parallellogram som spänns upp av vektorerna utgående från samma punkt).

Fö 1 : vad handlar den om?

- Definiton:

Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer. Välj tre punkter A, B och C så att $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ då är $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

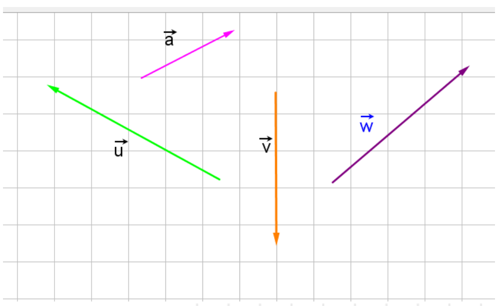


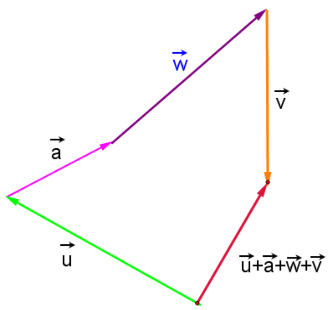
Observera att den resulterande vektorn $\overrightarrow{AC}$ startar i samma punkt som vektor $\vec{u}$ och slutar i den punkt som är slutpunkt för vektor $\vec{v}$.

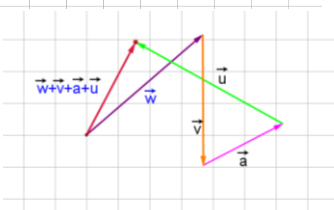
Vidare startar vektor $\vec{v}$ i samma punkt som är slutpunkten för vektor $\vec{u}$.

Denna additionsmetod kallas för polygonmetoden.

Exempel:





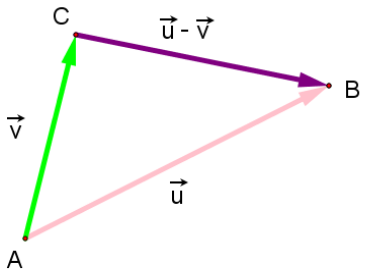


Addition av givna vektorer ger oss exakt samma vektor oberoende i vilken ordning vi väljet att addera vektorerna. Bearbeta bilden och testa en annan ordning vid additionen på egen hand.

Fö 1 : vad handlar den om?

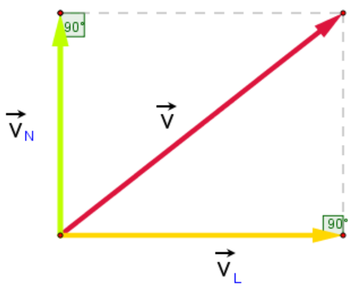
- Definiton:

  Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer. Välj tre punkter A, B och C så att $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ då är $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB}$. $(\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}))$



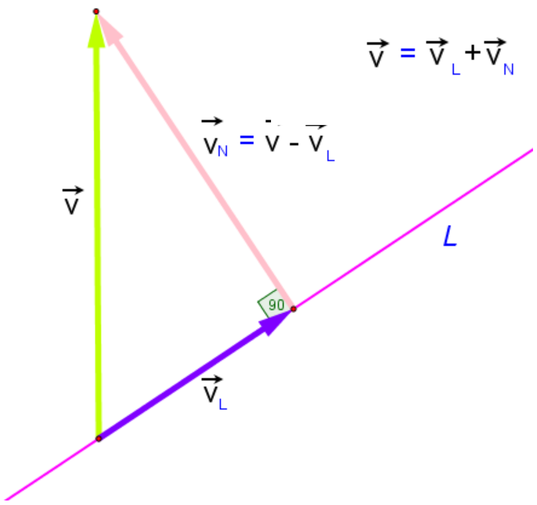
Ortogonal projektion

- Låt $\vec{v}$ vara en vektor. Vi kan dela upp $\vec{v}$ i komposanter $\vec{v}_N$ och $\vec{v}_L$



$$\vec{v} = \vec{v}_N + \vec{v}_L$$

- Låt $\vec{v}$ vara en vektor och L vara en linje. Den ortogonala projektionen av $\vec{v}$ på linje L, beteckvas $\vec{v}_L$.



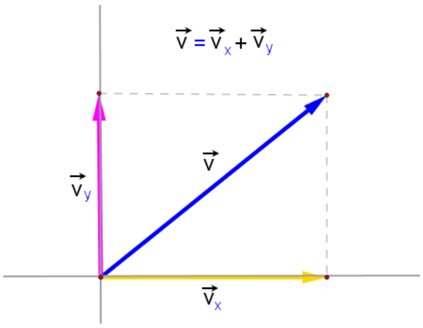
Fö 1 : vad handlar den om?

Räkneregler

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (kommutativitet)
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (associativitet)
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ där $\vec{0}$ är beteckning för nollvektorn
- $t\cdot(\vec{u}+\vec{v})=t\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$ där $t\in\Re$ (distributivitet)
- $(s+t)\cdot\vec{u}=s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{u}$ där $s,t\in\Re$ (distributivitet)
- $s\cdot(t\cdot\vec{u})=(s\cdot t)\cdot\vec{u}$ där $s,t\in\Re$

Vi inför koordinater

- Låt $\vec{v}$ vara en vektor. Vi kan dela upp $\vec{v}$ i komposanter $\vec{v}_x$ och $\vec{v}_y$

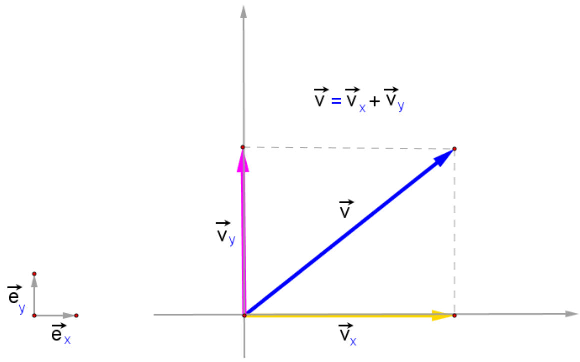


- Det finns då tal x respektive y så att $\vec{v}_x=x\cdot\vec{e}_x$ och $\vec{v}_y=y\cdot\vec{e}_y$.

  $\vec{v}=\vec{v}_x+\vec{v}_y=x\cdot\vec{e}_x+y\cdot\vec{e}_y$, koefficienterna framför respektive $\vec{e}_x$ och $\vec{e}_y$ är x och y

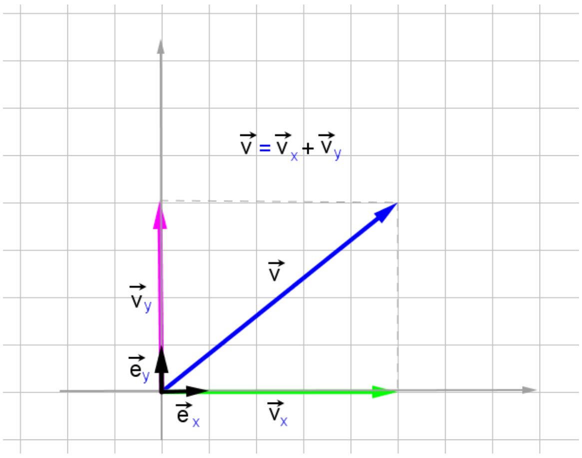
  kallas för $\vec{v}$:s koordinater i basen $(\vec{e}_x,\vec{e}_y)$.

  $(\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ är en ortonormerad bas (ON-bas).

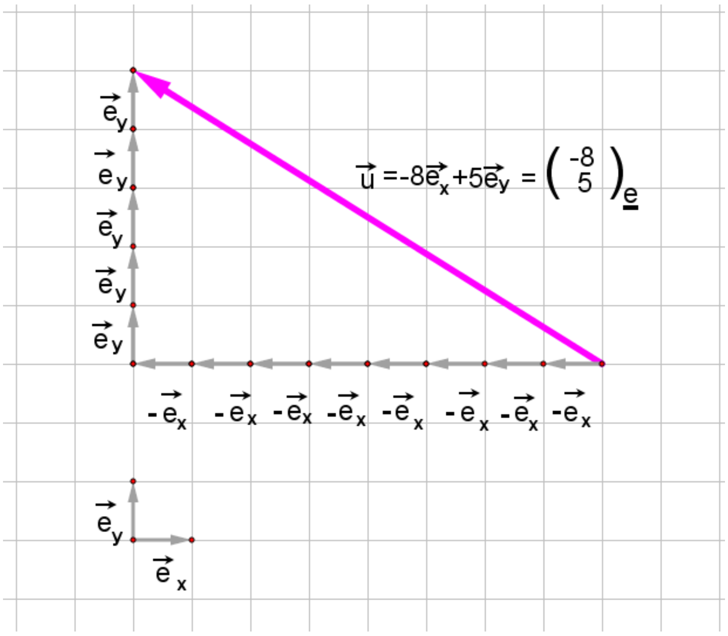


Fö 1 : vad handlar den om?

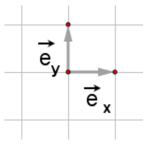
- $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$ *eller* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



- Exempel



Figuren ovan demonstrerar hur en vektor beskrivs med hjälp av basvektorerna. Basvektorerna "spänner upp" planet



(2" basvektorer "alltså 2 "dimensioner") och med hjälp av de kan vi beskriva alla vektorer i planet precis som på bilden ovan. Basvektorerna är sinsemellan ortogonala (alltså vinkelräta mot varandra) och är normerade (alltså har längden 1 le), därför kallas sådan bas för ortonormerad bas, kort ON -bas. Denna bas gör det enkelt för oss att beskriva

vektorerna, eller hur? Tänk på att minuset framför vektorn indikerar motsatt riktning.

Observera notationen $\vec{u} = -8\vec{e}_x + 5\vec{e}_y = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}_{\underline{e}}$

indexen vid parentesen anger i vilken bas koordinaterna ges.

Finns det bara en bas?

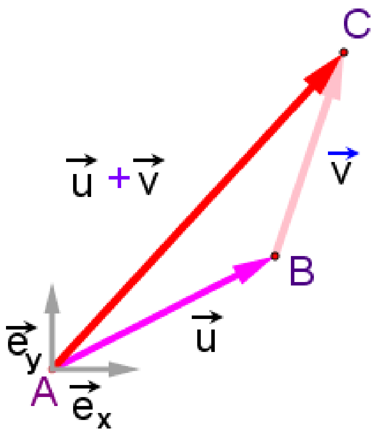
NÄHÄ …Det finns "massor" med olika baser som vektorerna kan beskrivas med och de behöver inte vara ortonormerade (mer om detta på föreläsningen och i boken med mera…). Vi kommer att jobba mest med ON- baser om inget annat anges.

Addition av vektorer

- Definition:

Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer så att $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ då $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

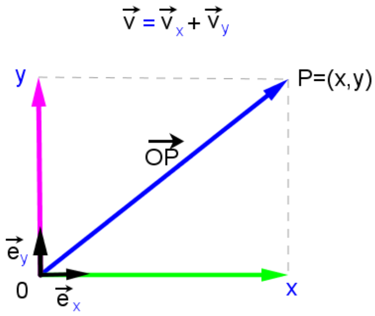
och $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$



Fö 1 : vad handlar den om?

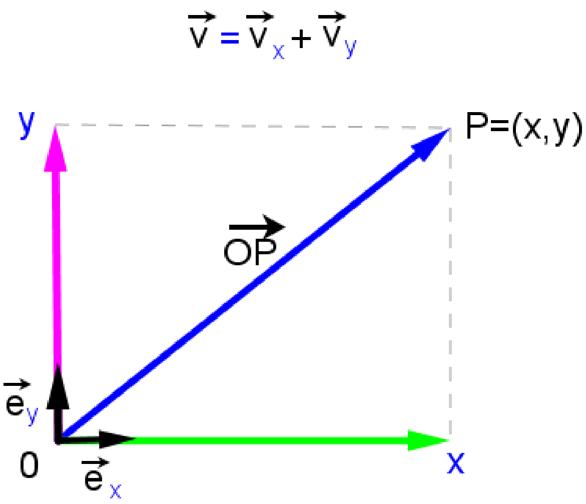
Ortsvektor

- En ortsvektor, $\overrightarrow{0P}$, är en vektor från origo till en punkt.



Längden av en vektor

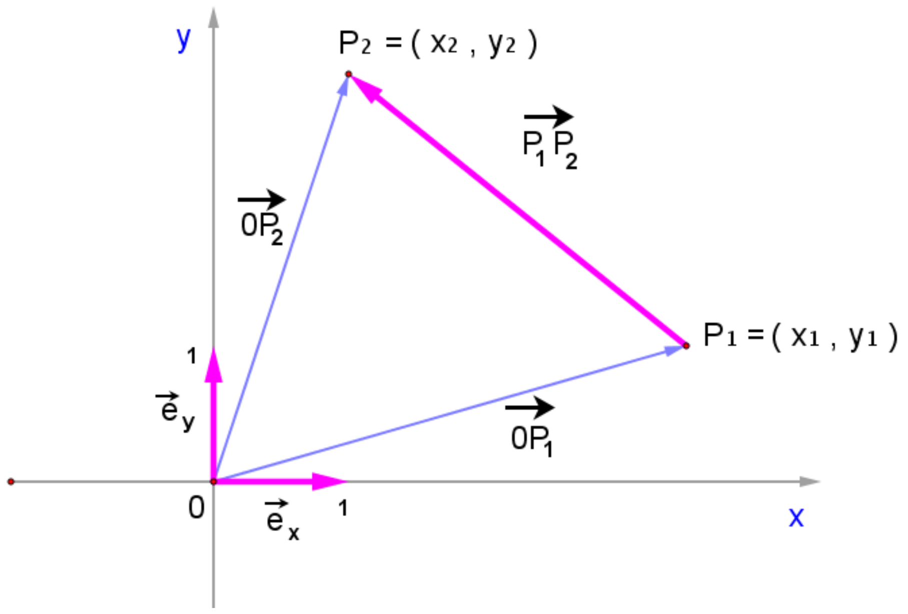
- Längden av $\overrightarrow{0P}$ beräknas med Pythagoras sats.
- $\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alltså $\left|\overrightarrow{0P}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Fö 1 : vad handlar den om?

Längden av en vektor mellan två punkter (avstånd mellan två punkter)

- Längden av en godtyckligt vektor mellan två punkter kan beräknas med Pythagoras sats.
- Utgå från figuren $\overrightarrow{0P_2} = \overrightarrow{0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{0P_2} - \overrightarrow{0P_1}$
- $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$
- Alltså för $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ är längden av vektorn $\overrightarrow{P_1P_2}$ och även avståndet mellan punkterna P_1 och P_2 (vi har fått fram avståndsformeln i planet)



Tack för din uppmärksamhet.