Fö 10: vad handlar den om?

- Basbyte
  - Definition och egenskaper
  - Bassamband
  - Basbyten och linjära avbildningar

Basbyten

Ur **Definition 5.4 och 5.5** (kort repetition från Fö9)

Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vara uppsättning av vektorer i $\Re^n$.

Ekvationen $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$

där de obekanta minst $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Re$ söks, kallas **beroendeekvationen.**

- Om $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ är den enda lösningen till **beroendeekvationen** säger vi att $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ är **linjärt oberoende.** Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ kallas då för **en bas** i $\Re^n$.

Vi har i huvudsak diskuterat standardbasen $\{\underline{e}\}$, ON-baser.

Ibland kan ett problem förenklas genom att man byter bas.

Fö 10: vad handlar den om?

Exempel: Vektorerna $\vec{f}_1$ och $\vec{f}_2$ har koordinaterna respektive $(1,1)^t$ resp $(-1,2)^t$ i b asen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

a. Visa att $\vec{f}_1$ och $\vec{f}_2$ också utgör en bas för planet

b. Vektor $\vec{v}$ har koordinaterna $(2,-1)^t$ i basen $\underline{f}$. Vad har $\vec{v}$ för koordinater i basen $\underline{e}$?

c. Vektor $\vec{u}$ har koordinaterna $(2,3)^t$ i basen $\underline{e}$. Vad har $\vec{u}$ för koordinater i basen $\underline{f}$?

Lösning:

a. $\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ som ger $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ $\vec{f}_1$ och $\vec{f}_2$ spänner upp ett parallellogram (är ej parallella), alltså man kan även säga att de spänner upp ett plan, alltså de är linjärt oberoende, alltså utgör en bas.

OBS! alternativ resonemang: $\vec{f}_1$ och $\vec{f}_2$ är inte parallella , därför att $\vec{f}_1 \neq k \cdot \vec{f}_2$ alltså är de linjärt oberoende, alltså utgör en bas.

OBS! alternativ resonemang: Visa att ekvationen

$\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ har endast tivial lösning…(övning)

Svar: $\vec{f}_1$ och $\vec{f}_2$ är linjärt oberoende, alltså utgör de en bas för planet

b. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}} = \underline{f} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\vec{f}_1 - \vec{f}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\underline{e}} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\underline{e}}$

Svar: $\vec{v}$ har koordinater $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{e}$.

c. Givet $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \overset{\text{övning}}{\ldots} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{2}{3}\vec{f}_1 - \frac{1}{3}\vec{f}_2 \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{f}_1 + \frac{1}{3}\vec{f}_2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \underline{e} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{f}_1 - \frac{1}{3}\vec{f}_2 \right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{f}_1 + \frac{1}{3}\vec{f}_2 \right) =$$

$$= \frac{4}{3}\vec{f}_1 - \frac{2}{3}\vec{f}_2 + \frac{3}{3}\vec{f}_1 + \frac{3}{3}\vec{f}_2 = \frac{7}{3}\vec{f}_1 + \frac{1}{3}\vec{f}_2 = \underline{f} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svar: $\vec{u}$ har koordinater $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{f}$.

Fö 10: vad handlar den om?

Basbyten i $\Re^3$

$\Re^3$:

- Låt $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vara en bas för $\Re^3$, så att varje vektor kan skrivas som

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{e} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{e} \cdot X_e$$ där X_e är koordinater för $\vec{x}$ i basen $\underline{e}$

- Låt nu $\underline{f} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ vara en bas för $\Re^3$, så att varje vektor kan skrivas som

$$\vec{x} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 = \begin{bmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underline{f} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underline{f} \cdot Y_f$$ där Y_f är koordinater för $\vec{x}$ i basen $\underline{f}$

- Antag att det råder ett samband

$$\begin{bmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

alltså $\underline{f} = \underline{e} \cdot P$, **samband mellan baserna**

där $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}_{\underline{e}} = p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2 + p_{31}\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix}_{\underline{e}}$ och $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix}_{\underline{e}}$

Vi söker nu samband mellan koordinaterna i respektive bas, där samband mellan baserna är

$$\underline{f} = \underline{e} \cdot P$$

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \underline{e} \cdot X_e$ och $\vec{x} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 = \underline{f} \cdot X_f$

alltså $\vec{x} = \underline{e} \cdot X_e = \underline{f} \cdot X_f = \left[\underline{f} = \underline{e} \cdot P\right] = \underline{e} \cdot P \cdot X_f$

då $\underline{e} \cdot X_e = \underline{e} \cdot P \cdot X_f \Rightarrow X_e = P \cdot X_f$

samband mellan koordinaterna för vektor $\vec{x}$ i respektive bas ges av

$$X_{\underline{e}} = P \cdot X_{\underline{f}}$$

Fö 10: vad handlar den om?

Sats 8.1 Om $\underline{f} = \underline{e} \cdot P$ (bassambandet) där matrisen P är icke-singulär ($\det P \neq 0$) så är :

- $X_e = P \cdot X_f$ (gamla koordinater beskrivna i de nya)
- $X_f = P^{-1} X_e$ (nya koordinater beskrivna i de gamla)

P kallas **basbytesmatrisen** från basen $\underline{e}$ (gamla basen) till basen $\underline{f}$ (nya basen)

Sats 8.1 (följdsats) Om $\underline{e}$ och $\underline{f}$ är ON - baser så är :

- P en ON – matris, och då gäller att
- $X_e = PX_f$ och $X_f = P^{-1} X_e = P^t X_e$

Basbyten och linjära avbildningar

Vi studerar avbildningar från $\Re^n$ till $\Re^n$.

Obs! Vi avviker lite fr ån bokens beteckningar.

Låt $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ vara en bas för $\Re^n$.

Låt den linjära avbildningen **L** ges av matrisen A_e i denna bas, dvs om $\vec{u} = \underline{e} \cdot X_e$ så är :

$L(\vec{u}) = \underline{e} \cdot A_e X_e$, kolonnerna i A_e innehåller bilden av $\vec{e}_1$, bilden av $\vec{e}_2$, osv

Inför nu en ny bas $\underline{f}$ via sambandet $\underline{f} = \underline{e} \cdot P$

Om $\vec{u} = \underline{e} \cdot X_e = \underline{f} \cdot X_f$ och enligt sats 8.1 så gäller $X_e = PX_f$ då gäller:

- $L(\vec{u}) = \underline{e} \cdot A_e X_e$ räknat i basen $\underline{e}$
- $L(\vec{u}) = \underline{f} \cdot A_f X_f$ räknat i basen $\underline{f}$

Fö 10: vad handlar den om?

Dvs $\underline{e} \cdot A_e X_e = \underline{f} \cdot A_f X_f$

Men $X_e = PX_f$ och $\underline{f} = \underline{e} \cdot P$, insättning av respektive i $\underline{e} \cdot A_e X_e = \underline{f} \cdot A_f X_f$ ger

$\underline{e} \cdot A_e PX_f = \underline{e} \cdot PA_f X_f$ som ger sambandet $A_e P = PA_f$

Dvs för att få A_e ur $A_e P = PA_f$ multiplicera med P^{-1} på höger sida så att:

$$A_e PP^{-1} = PA_f P^{-1} \Leftrightarrow A_e = PA_f P^{-1}$$

För att få A_f ur $A_e P = PA_f$ multiplicera med P^{-1} från vänster sida så att:

$$P^{-1} A_e P = P^{-1} PA_f \Leftrightarrow A_f = P^{-1} A_e P$$

Avbildningsmatrisen i **nya** basen

Avbildningsmatrisen i **gamla** basen

$$A_e = PA_f P^{-1}$$

$$A_f = P^{-1} A_e P$$

Bokens notation	Notation här
A_{ee}	A_f
A_e	A_e

Boken använder då sambandet $A = PA_{ee} P^{-1}$ (i stället för $A_e = PA_f P^{-1}$)

Fö 10: vad handlar den om?

Exempel: Bestäm avbildningsmatrisen i standardbasen $\underline{e}$ för den linjära avbildningen som speglar i planet $\pi : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$.

Lösning: Vi söker A_e

Välj en ny bas $\underline{f}$ som passar geometrin, till exempel två vektorer i planet (varför? vid spegling avbildas vektorerna i planet på sig själva)

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \quad \text{där } L(\vec{f}_1) = \vec{f}_1$$

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3 \quad \text{där } L(\vec{f}_2) = \vec{f}_2$$

Välj sedan en som är ortogonal mot planet (varför? tänk på vad blir biden av en sådan vektor vid speglingen i planet)

$$\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_2 \quad \text{där } L(\vec{f}_3) = -\vec{f}_3$$

Den **nya** basen ges nu av följande basvektorer:

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \quad \text{där } L(\vec{f}_1) = \vec{f}_1$$

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3 \quad \text{där } L(\vec{f}_2) = \vec{f}_2$$

$$\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \underline{e} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \quad \text{där } L(\vec{f}_3) = -\vec{f}_3$$

Vi vet att **bassambandet** ges av $\underline{f} = \underline{e}P$

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{cases} \quad \text{som ges i matrisform } \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Fö 10: vad handlar den om?

Alltså $\underline{f} = \underline{e} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Vi söker A_f , avbildningsmatrisen i den nya basen fås mha :

$\begin{cases} L(\vec{f}_1) = \vec{f}_1 \\ L(\vec{f}_2) = \vec{f}_2 \\ L(\vec{f}_3) = -\vec{f}_3 \end{cases}$ som ges i matrisform $\left[L(\vec{f}_1) \quad L(\vec{f}_2) \quad L(\vec{f}_3)\right] = \left[\vec{f}_1 \quad \vec{f}_2 \quad \vec{f}_3\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Alltså för $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ och $A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ blir

$A_e = PA_f P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$ dvs vi behöver P^{-1}

Sök P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \text{övning} \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-5}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$A_e = PA_f P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} = \overset{\text{övning}}{\cdots} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $A_e = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$

Kontrollera att $A_e \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_e \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_e \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

Fö 10: vad handlar den om?

- **Alternativt basbyte**

- här väljer vi en ny bas som passar geometrin som är en **ON-bas**

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}_{\underline{e}} = \underline{e}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \text{ där } L(\vec{f}_1) = -\vec{f}_1$$

$$\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}_{\underline{e}} = \underline{e}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ där } L(\vec{f}_2) = \vec{f}_2$$

$$\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}_{\underline{e}} = \underline{e}\cdot\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix} \text{ där } L(\vec{f}_3) = \vec{f}_3$$

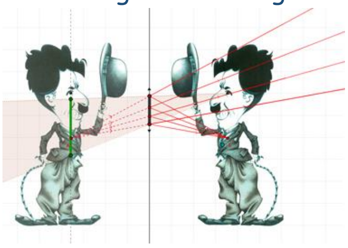
Då blir P en ON – matris, alltså $P^{-1} = P^t$.

Japp…en ON-matris! då kan man bara transponera P för att hitta inversen

$$A_f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & -\frac{1}{3}\sqrt{5} \end{bmatrix} \qquad A_e = PA_fP^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

… summa summarum, oberoende av valet så ger beräkningarna alltid samma svar…eller hur?… men du



måste göra smarta val så klart!