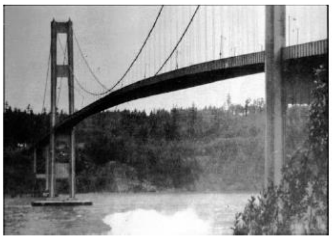
Fö 11: vad handlar den om?

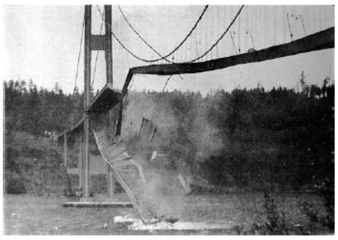
- Diagonala matriser
- Egenvärden och egenvektorer
- Sekularpolynomet och sekularekvationen

Egenfrekvens och egensvängning

Tacoma Narrows Bridge är en 1600 meter lång en hängbro som tillåter svängningar.



den 7 november 1940



... och 2 timmar senare

Varför? **Vikt, form och längd:** Bron var förhållandevis lätt och hade en form och längd som tillät svängning

Resonans: Vindpustarna kom **i rätt ögonblick**, så att brons **egensvängning** förstärktes

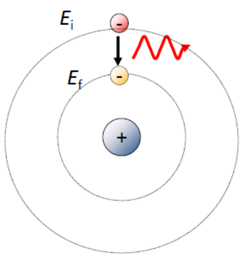
Linje spektrum

Individuella atomer sänder bara ut ljus av vissa diskreta våglängder som är karakteristiska för varje atom

Schrödingers ekvation Hamiltons operator

$$\hat{H}\psi = \lambda\psi$$

vågfunktionen energi



Kvantmekanikens filosofi: partiklens tillstånd är summa av (oändligt många) egentillstånden: $\psi = \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \cdots$ så att Hamiltons operator kan diagonaliseras:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Fö 11: vad handlar den om?

Ett algebraiskt perspektiv: diagonalmatriser

Det är mycket enklare att arbeta med **diagonalmatriser!**

- Multiplicera med vektor: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 u_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 u_3 \end{bmatrix}$

- Matrisprodukt: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \xi_3 \end{bmatrix}$

- Matrispotens: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1{}^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3{}^k \end{bmatrix}$

λ "lambda"

ξ "xi"

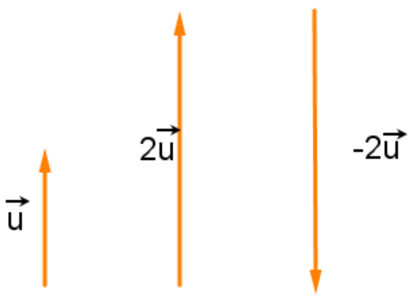
Egenvektor och egenvärde

Definition 7.1

Ett tal λ kallas egenvärde till A om det finns en vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ sådan att

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

Vektorn $\vec{u}$ ovan kallas **egenvektor** med **egenvärde** λ till A.



Om $A\vec{u} = 2\vec{u}$ så är egenvärdet $\lambda = 2$

och $\vec{u}$ kallas egenvektor.

Om $A\vec{u} = -2\vec{u}$ så är egenvärdet $\lambda = -2$

och $\vec{u}$ kallas egenvektor.

Fö 11: vad handlar den om?

Observation:

Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ båda är egenvektorer med egenvärde λ till A och $k \in \Re$ så gäller

- $A(\vec{u}+\vec{v}) = A(\vec{u}) + A(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
- $A(k \cdot \vec{u}) = k \cdot A(\vec{u}) = k \cdot (\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda (k \cdot \vec{u})$

dvs både $\vec{u}+\vec{v}$ och $k \cdot \vec{u}$ är egenvektorer med egenvärde λ till A.

Exempel :

Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ båda är egenvektorer med egenvärden $\lambda_1 = 1$ resp $\lambda_2 = 2$ till A. Bestäm :

a. $A(5\vec{v})$

b. $A^2(\vec{v})$

c. $A^k(3\vec{u} - \vec{v})$

Lösning:

a. I uppgiften givet att $A(\vec{v}) = 2\vec{v}$.

då blir $A(5\vec{v}) = 5 \cdot A(\vec{v}) = 5 \cdot (2\vec{v}) = 10\vec{v}$

svar: $A(5\vec{v}) = 10\vec{v}$

b. $A^2(\vec{v}) = A(A(\vec{v})) = A(2\vec{v}) = 2A(\vec{v}) = 2 \cdot (2\vec{v}) = 4\vec{v}$

svar: $A^2(\vec{v}) = 4\vec{v}$

c. I uppgiften givet att $A(\vec{u}) = 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ och $A(\vec{v}) = 2\vec{v}$.

$$A^k(3\vec{u} - \vec{v}) = A^k(3\vec{u}) - A^k(\vec{v}) = A^{k-1}(A(3\vec{u})) - A^{k-1}(A(\vec{v})) = A^{k-1}(3A(\vec{u})) - A^{k-1}(A(\vec{v})) =$$

$$= \begin{bmatrix} A(\vec{u}) = \vec{u} \\ A(\vec{v}) = 2\vec{v} \end{bmatrix} = A^{k-1}(3 \cdot \vec{u}) - A^{k-1}(2\vec{v}) = 3 \cdot A^{k-1}(\vec{u}) - 2 \cdot A^{k-1}(\vec{v}) = 3 \cdot A^{k-2}(A(\vec{u})) - 2 \cdot A^{k-2}(A(\vec{v})) =$$

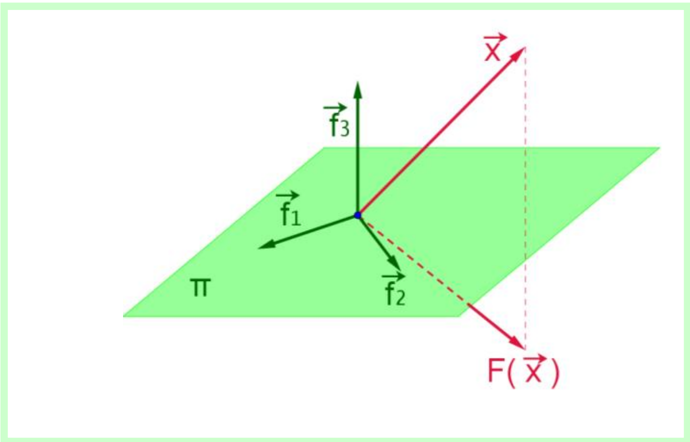
$$= 3 \cdot A^{k-2}(\vec{u}) - 2 \cdot A^{k-2}(2\vec{v}) == 3 \cdot A^{k-2}(\vec{u}) - 2^2 \cdot A^{k-2}(\vec{v}) \overset{\text{övning}}{=} \quad \ldots \quad = 3\vec{u} - 2^k \vec{v}$$

svar: $A^k(3\vec{u} - \vec{v}) = 3\vec{u} - 2^k \vec{v}$

Fö 11: vad handlar den om?

Exempel: Betrakta speglingen F i planet $\pi : x_1 - 2x_3 = 0$

- Då gäller att $A\vec{x} = \vec{x}$ för alla vektorer $\vec{x}$ i planet π, dvs. $\lambda_1 = 1$.
- Å andar blir speglingen av normalvektorn $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $F(\vec{f}_3) = -\vec{f}_3$, dvs. $\vec{f}_3$ är en egenvektor med egenvärde $\lambda_2 = -1$
- Om $\vec{f}_1$ och $\vec{f}_2$ är en bas i π (observera att $\dim \pi = 2$) då bildar $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ en bas i $\Re^3$
- Avbildningsmatrisen i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ ges av $A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

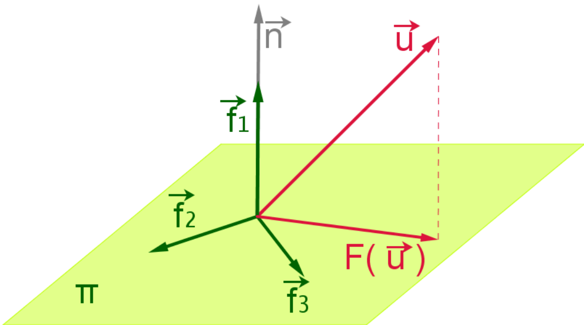


Observera att

- $\lambda_1 = 1$ är för både $\vec{f}_1$ och $\vec{f}_2$ som ligger i π
- $\lambda_2 = -1$ är för $\vec{f}_3$ som speglas i π

Fö 11: vad handlar den om?

Ortogonal projektion i plan



Matrisframställning:

- Låt $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ vara en höger orienterad ON-bas
- $\vec{f}_1 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$, där $\vec{n}$ är normalvektorn
- $\vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ ligger i π

vilket ger

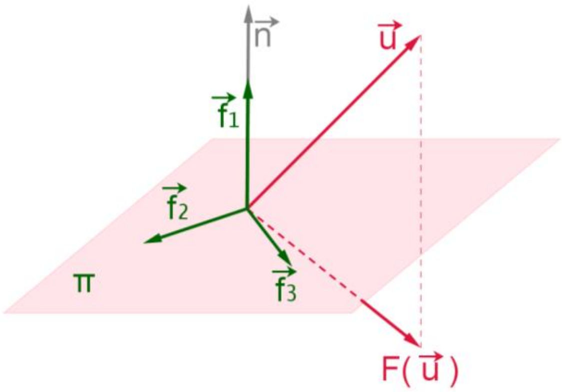
- $L(\vec{f}_1) = \vec{0} = \underline{f} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dvs. $\lambda_1 = 0$, $\underline{f} = \lfloor \vec{f}_1 \quad \vec{f}_2 \quad \vec{f}_3 \rfloor$
- $L(\vec{f}_2) = \vec{f}_2 = \underline{f} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dvs. $\lambda_2 = 1$
- $L(\vec{f}_3) = \vec{f}_3 = \underline{f} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dvs. $\lambda_3 = 1$

Avbildningsmatrisen för ortogonal projektion i planet i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ ges av :

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fö 11: vad handlar den om?

Spegling i ett plan



Avbildningsmatrisen för spegling i ett plan

i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ ges av :

$$A_f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisframställning:

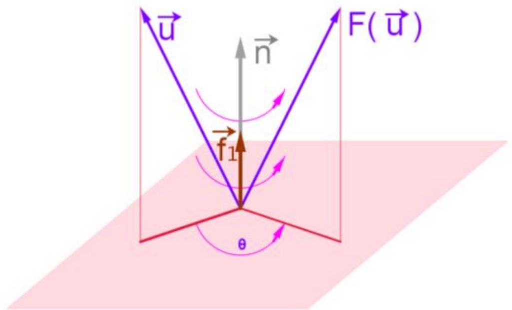
- Låt $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ vara en höger orienterad ON-bas
- $\vec{f}_1 = \dfrac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$, där $\vec{n}$ är normalvektorn
- $\vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ ligger i π

vilket ger

- $L(\vec{f}_1) = -\vec{f}_1 = \underline{f} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dvs. $\lambda_1 = -1$, $\underline{f} = [\vec{f}_1 \quad \vec{f}_2 \quad \vec{f}_3]$
- $L(\vec{f}_2) = \vec{f}_2 = \underline{f} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dvs. $\lambda_2 = 1$
- $L(\vec{f}_3) = \vec{f}_3 = \underline{f} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dvs. $\lambda_3 = 1$

Fö 11: vad handlar den om?

Vridning i rummet kring en fix axel



Matrisframställning:

- Låt $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ vara en höger orienterad ON-bas
- $\vec{f}_1 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$, där $\vec{n}$ är axelns riktningsvektor
- $\vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ ligger i planet ortogonal mot

  axelns riktningsvektor

vilket ger

- $L(\vec{f}_1) = \vec{f}_1 = \underline{f} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dvs. $\lambda_1 = 1$, $\underline{f} = [\vec{f}_1 \quad \vec{f}_2 \quad \vec{f}_3]$
- $L(\vec{f}_2) = \cos\theta \cdot \vec{f}_2 + \sin\theta \cdot \vec{f}_3 = \underline{f} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$
- $L(\vec{f}_3) = -\sin\theta \cdot \vec{f}_2 + \cos\theta \cdot \vec{f}_3 = \underline{f} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

Avbildningsmatrisen för en vridning i rummet är

i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ ges av :

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Fö 11: vad handlar den om?

Två viktiga frågor:

- **Hur** kan man bestämma egenvärden och egenvektorer?
- **Vilka** operatorer (linjära avbildningar) kan diagonaliseras?

Hur?

Vi vill lösa ekvationen $A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ där

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ och } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} - \lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

dvs $$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eller $$A\vec{x} - \lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot I) = \vec{0}$$

dvs $$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi är **inte** intresserade av den triviala lösningen då alla $\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Enligt sats 5.2 finns det andra lösningar **omm** $\det(A-\lambda I)=0$

Fö 11: vad handlar den om?

Sekularpolynomet

Sats 7.1

Talet λ är ett egenvärde till $n \times n$ matrisen A om och endast om

$$det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

Definition

Låt A vara en $n \times n$ - matris. Polynomet $det(A - \lambda \cdot I)$ kallas **sekularpolynomet** till A.

och ekavtionen $det(A - \lambda \cdot I) = 0$ kallas **sekularekvationen** eller **karakteristiska ekvationen.**

Exempel: Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Lösning:

- Först tar vi fram **sekularpolynomet** till A, $det(A - \lambda \cdot I)$

$$det(A - \lambda \cdot I) = det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 =$$

$$= \left(\lambda - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{24}{4} = \left(\lambda - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\lambda - \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(\lambda - \frac{7}{2} + \frac{5}{2}\right) =$$

$$= (\lambda - 6)(\lambda - 1)$$

- **Sekularekvationen** $det(A - \lambda \cdot I) = 0$ ger då följanede

$(\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 6) = 0$ eller $(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6$ eller $\lambda = 1$

- Vi söker nu motsvarande egenvektorer mha $(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Fö 11: vad handlar den om?

- För **λ=6** söker vi lösningar till $(A-6\cdot I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$ **alltså till** $\begin{bmatrix}2-6 & 2\\ 2 & 5-6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$.

  Den utökade matrisen ger:

  $$\left(\begin{array}{cc|c}-4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{array}\right)_{(r1/2)}\sim\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{array}\right)_{(r2+r1)}\sim\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow x_2=2x_1$$

  Alltså $x_2=2x_1$, tag t.ex. $x_1=t, t\neq 0$ och $t\in\Re$.

  Egenvektorerna till **λ=6** ges då av $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ **där** $t\neq 0$ och $t\in\Re$.

OBS! En egenvektor kan aldrig vara en noll vektorn! Bara λ kan anta värdet noll.

- För **λ=1** söker vi lösningar till $(A-1\cdot I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$ **alltså till** $\begin{bmatrix}2-1 & 2\\ 2 & 5-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$.

  Den utökade matrisen ger:

  $$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\end{array}\right)_{(r2-2\cdot r1)}\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 0 & -0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow x_1=-2x_2$$

  Alltså $x_1=-2x_2$, tag t.ex. $x_2=t, t\neq 0$ och $t\in\Re$.

  Egenvektorerna till **λ=1** ges då av $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ **där** $t\neq 0$ och $t\in\Re$.

Svar: Egenvärden till $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ är **λ=1** och **λ=6**.

Egenvektorerna till **λ=1** ges då av $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ **där** $t\neq 0$ och $t\in\Re$.

Egenvektorerna till **λ=6** ges då av $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ **där** $t\neq 0$ och $t\in\Re$.

Fö 11: vad handlar den om?

Exempel: Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Lösning:

- Först tar vi fram **sekularpolynomet** till A, $det(A-\lambda \cdot I)$

$$det(A-\lambda \cdot I)=det\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=det\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)=det\begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+4$$

- **Sekularekvationen** $det(A-\lambda \cdot I)=0$ ger då följande

$$\lambda^2+4=0$$

Sekularekvationen saknar reella rötter.

Detta medför att A saknar egenvärden och egenvektorer.

Svar: A saknar egenvärden och egenvektorer.

Sats 7.2-7.5

Sats 7.2 (SPEKTRALSATSEN)

Antag att S är en $n \times n$ - matris. Då gäller att S har n stycken <u>ortogonala</u> <u>egenvektorer</u> om och ensdast om S är **symmetrisk**. $(S=S^t)$

Sats 7.3

Antag att S är en **symmetrisk** matris av $n \times n$ typ. Och att $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är två egenvektorer med motsvarande egenvärden λ_1 och λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Då $\vec{u}$ är $\vec{v}$ och **ortogonala**.

Sats 7.4

Antag att A är en matris av $n \times n$ typ.

Egenvektorer som hör till skilda egenvärden är **linjärt oberoende.**

Sats 7.5

Om $n \times n$ matrisen A har n stycken olika egenvärden så har matrisen n stycken linjärt oberoende egenvektorer.

Fö 11: vad handlar den om?

Exempel:

Bestäm tre ortogonala egenvektorer till $A=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$.

Lösning:

Matrisen är symmetrisk, alltså existerar tre ortogonala egenvektorer enligt spektralsatsen .

Vi söker egenvärden genom att lösa sekularekvationen $det(A-\lambda I)=0$.

Där $A=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$. Vi börjar med att beräkna $det(A-\lambda I)$.

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix}=/\,k1-k2\,/=\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -2 \\ -6+\lambda & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix}=(6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=/\,r3+r1\,/=(6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -2 \\ 0 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=/\text{ utveckla efter 1:a kolonnen }/=(6-\lambda)\cdot 1\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 10-\lambda & -2 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=/\,r1+r2\,/=(6-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 6-\lambda \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix}=(6-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix}=(6-\lambda)^2(8-\lambda+4)=(6-\lambda)^2(12-\lambda)$$

Sekularekvationen $det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow (6-\lambda)^2(12-\lambda)=0 \Leftrightarrow (6-\lambda)=0$ eller $(12-\lambda)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=6$ eller $\lambda=12$

Fö 11: vad handlar den om?

Genom att lösa ekvationen $(A-\lambda I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$ för respektive egenvärde får vi fram tillhörande egenvektorer:

för $\lambda=6$:

alltså $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim / \, r2+2\cdot r1 / \\ / \quad r3-r1 \quad / \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1-2x_2+x_3=0$

för $x_2=s$ och $x_3=t$ blir $x_1=2s-t$

alltså $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=s\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger alla egenvektorer för $\lambda=6$.

Som du ser är vektorerna parallella med planet $\pi: x_1-2x_2+x_3=0$ som spänns upp av vektorerna $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s,t\in\Re$ med villkoret att båda parametrarna inte kan vara lika med 0 samtidigt, du minns väl att egenvektor kan inte vara nollvektorn.

$(A-\lambda I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$ ger för $\lambda=12$:

$\begin{bmatrix} 7-12 & -2 & 1 \\ -2 & 10-12 & -2 \\ 1 & -2 & 7-12 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ alltså

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim / \quad r2/2 \quad / \\ / \, \text{byter plats med} \; r1 / \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim / \; r2+r1 \; / \\ / \, r3+5\cdot r1 / \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Fö 11: vad handlar den om?

$$\sim\begin{matrix} / \ \ r2/3 \ \ / \\ /r3/(-12)/ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} /r1-2\cdot r2/ \\ \\ / \ \ r3+r2 \ \ / \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \Rightarrow x_1 = x_3 \\ \Rightarrow x_2 = -2x_3 \\ \end{matrix}$$

för $x_3 = r$ blir $x_1 = r$ och $x_2 = -2r$

alltså $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ -2r \\ r \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ där $r \in \Re$ och $r \neq 0$ ger alla egenvektorer för $\lambda = 12$.

Vidare sats 7.3 (boken) ger direkt två ortogonala egenvektorer som hör till olika egenvärden,

t.ex. då $t = 1,\ s = 0,\ r = 1$ får vi $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .Den tredje vektorn måste ligga i planet, tag t.ex. vektorn

parallell med $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ t. ex. vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Svar: De sökta vektorerna är till exempel $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Du kan lätt kontrollera att vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ har samma egenvärde som alla vektorer i planet.

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-2+1 \\ -2+10+(-2) \\ 1-2+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Du kan lätt kontrollera att $A = P \cdot A_f \cdot P^{-1}$.

Fö 11: vad handlar den om?

Om $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, blir $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ och $A_f = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Då blir $A = P \cdot A_f \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$