Fö 12: vad handlar den om?

- Diagonalisering
- Kvadratiska former
  - Matrisform
  - Diagonalisering av kvadratiska former
- Andragradskurvor
  - De olika kurvtyperna
  - Rita graferna i "rätt bas"

Definition 7.1

Den kvadratiska $n \times n$ matrisen A är diagonaliserbar om det finns en icke-singulär (d.v.s. inverterbar) matris P och en diagonal matris D så att:

$$D = P^{-1}AP$$

(Jmf med $A_f = P^{-1}A_eP$)

Sats 8.5

Den kvadratiska $n \times n$ matrisen A är diagonaliserbar **omm** matrisen har en uppsättning av n stycken egenvektorer $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\}$ som är linjärt oberoende. Den matris P vars kolonner består av dess egenvekorers koordinater (i standardbasen) är den efterågade diagonaliserande matrisen och diagonalmatrisen D byggs upp av motsvarande egenvärden.

Sats 8.6

Om matrisen A av typen $n \times n$ har n stycken egenvärden så är den diagonaliserbar.

Sats 8.7 (Diagonaliseringssatsen)

Till varje symmetrisk $n \times n$ - matris A, kan man finna en ON-matris P och en diagonalmatris D så att:

$$D = P^t AP \text{ och } A = PDP^t$$

Fö 12: vad handlar den om?

Exempel: Diagonalisera $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$.

Lösning:

- Först tar vi fram **sekularpolynomet** till A, $det(A-\lambda\cdot I)$

$$det(A-\lambda\cdot I)=det\left(\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=det\left(\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=det\begin{bmatrix}2-\lambda & 2\\ 2 & 5-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\ 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)-4=10-2\lambda-5\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-7\lambda+6=$$

$$=\left(\lambda-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{24}{4}=\left(\lambda-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\lambda-\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\right)\left(\lambda-\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\right)=$$

$$=(\lambda-6)(\lambda-1)$$

- **Sekularekvationen** $det(A-\lambda\cdot I)=0$ ger då följanede

$$(\lambda-6)(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow (\lambda-6)=0 \text{ eller } (\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=6 \text{ eller } \lambda=1$$

- Vi söker nu motsvarande egenvektorer mha $(A-\lambda\cdot I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$

- För **λ=6** söker vi lösningar till $(A-6\cdot I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$ **alltså till**

$$\begin{bmatrix}2-6 & 2\\ 2 & 5-6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Den utökade matrisen ger:

$$\left(\begin{array}{cc|c}-4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{array}\right)^{(r1/2)}\sim\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{array}\right)_{(r2+r1)}\sim\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow x_2=2x_1$$

Alltså $x_2=2x_1$, tag t.ex. $x_1=t, t\neq 0$ och $t\in\Re$.

Egenvektorerna till **λ=6** ges då av $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ **där** $t\neq 0$ och $t\in\Re$.

OBS! En egenvektor kan aldrig vara en noll vektorn! Bara λ kan anta värdet noll.

- För **λ=1** söker vi lösningar till $(A-1\cdot I)\cdot\vec{x}=\vec{0}$ **alltså till**

$$\begin{bmatrix}2-1 & 2\\ 2 & 5-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Den utökade matrisen ger: $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\end{array}\right)_{(r2-2\cdot r1)}\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow x_1=-2x_2$

Fö 12: vad handlar den om?

Alltså $x_1 = -2x_2$, tag t.ex. $x_2 = t, t \neq 0$ och $t \in \Re$.

Egenvektorerna till **λ=1** ges då av $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **där** $t \neq 0$ och $t \in \Re$.

- Summa summarum:

Egenvärden till $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ är **λ=1** och **λ=6**.

Egenvektorerna till **λ=1** ges då av $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **där** $t \neq 0$ och $t \in \Re$.

Tag för **λ=1** t.ex. egenvektor $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Egenvektorerna till **λ=6** ges då av $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **där** $t \neq 0$ och $t \in \Re$.

Tag för **λ=6** t.ex. egenvektor $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Då ges basbytesmatrisen matrisen och diagonalmatrisen av:

$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ **och** $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ← (övning)

- A är diagonaliserad enligt:

$$A = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = A$$

Fö 12: vad handlar den om?

Vad är kvadratiskt form?

Definition: Kvadratisk form av två och tre variabler.

En kvadratisk form av två och tre variabler är ett uttryck av typen

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

respektive

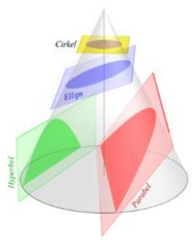
$$Q(x,y,z) = ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2$$

där a,b,c,d,e och f är reella konstanter.

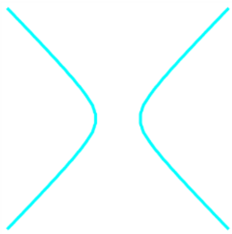
Form är ett äldre ord för homogent polynom, det vill säga ett polynom där alla termer

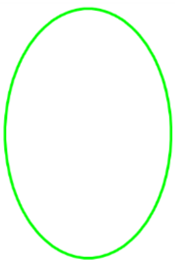
har samma totala gradtal. Med andra ord är en kvadratisk form ett homogent polynom

av **andra** graden.



$x^2 + y^2 = 1$ $\quad$ $x^2 - y^2 = 1$ $\quad$ $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$





Cirkel $\quad$ **Hyperbel** $\quad$ **Ellips**

Observera att respektive vänster led representeras av kvadratisk form.

Fö 12: vad handlar den om?

Varför är kvadratiska former intressanta?

Dyker upp i tillämpningar som t.ex.

- uttryck som definierar kurvor och ytor
- uttryck för energi, speciellt rotationsenergi då en kropp roterar kring fix axel
- max/min undersökningar för funktioner av flera vaiabler etc,etc,…

och de är tacksamma att studera då de kan transformeras till enkel form och därmed är de ett bra exempel på användning av egenvärdesteori

Matrsibeskrivning av kvadratiska former

Samma kvadratiska form kan defineras av olika matriser A.

Exempel: Ange tre matriser A, B och C för att beskriva den kvadratiska formen Q:

$$Q(\vec{u}) = Q(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

Lösning: t.ex.

$$Q(\vec{u}) = Q(x_1,x_2) = x_1(1\cdot x_1 + 4x_2) + x_2(0\cdot x_1 + 1\cdot x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Q(\vec{u}) = Q(x_1,x_2) = x_1(1\cdot x_1 + 2x_2) + x_2(2\cdot x_1 + 1\cdot x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Q(\vec{u}) = Q(x_1,x_2) = x_1(1\cdot x_1 + 1\cdot x_2) + x_2(3\cdot x_1 + 1\cdot x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Svar: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. **OBS! Endast B är symmetrisk.**

Fö 12: vad handlar den om?

Sats 8.8

Till varje kvadratisk form Q hör en entydigt bestämd symmetrisk matris S sådan att

$$Q(\vec{x}) = X^t SX$$

Exempel:

Betrakta $Q(\vec{x}) = Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 14x_2x_3$ och ange den

symmetriska avbildningsmatisen S.

Lösning:

$$Q(\vec{x}) = -x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 14x_2x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2/2 & 8/2 \\ 2/2 & 3 & -14/2 \\ 8/2 & -14/2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Svar: $S = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$.

OBS: att indexerna för respektive element ska hjälpa dig att snabbt hitta S, så t.ex. koefficienten **8** för termen, $8x_1x_3 = 4x_1x_3 + 4x_3x_1$ fördelas som **4** och **4** på respektive plats för element s_{13} och s_{31} osv.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -1_{11} & 1_{12} & 4_{13} \\ 1_{21} & 3_{22} & -7_{23} \\ 4_{31} & -7_{32} & 5_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

Fö 12: vad handlar den om?

Diagonalisering av kvadratiska former

Betrakta

$$Q(\vec{x}) = Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = X_e^t S X_e$$

där $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ är koordinater för $\vec{x}$ i standardbasen $\underline{e}$ för $\Re^3$

Låt nu $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ vara en ON-bas för $\Re^3$ så att $\vec{x}$:s koordinater i denna bas ges av $X_f = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Antag att det råder ett samband $\underline{f} = \underline{e}P$, alltså

$$\begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

P är en ON-matris med koordinater för $\vec{f}_1$ (kolonn 1), $\vec{f}_2$ (kolonn 2), $\vec{f}_3$ (kolonn 3) i basen $\underline{e}$

Så gäller $\vec{x} = \underline{e}X_e = \underline{f}X_f = \lfloor \underline{f} = \underline{e}P \rfloor = \underline{e}PX_f \Rightarrow X_e = PX_f$

$$Q(\vec{x}) = Q(x_1, x_2, x_3) = X_e^t S X_e = (PX_f)^t S (PX_f) = X_f^t P^t S P X_f = X_f^t (P^t S P) X_f = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \cdot (P^t S P) \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Sats 8.7 (Diagonaliseringssatsen)

Till varje symmetrisk $n \times n$ - matris A, kan man finna en ON-matris P och en diagonalmatris D så att:

$$D = P^t A P \text{ och } A = P D P^t$$

De nya basvektorerna ska väljas som dess egenvektorer, där diagonalmatris består av egenvärdena.

Fö 12: vad handlar den om?

$$Q(\vec{x})=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\cdot\left(P^t SP\right)\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\cdot D\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2$$

Allstå $Q(\vec{x})=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2$ **"KANONISKA FORM"**

Sats 8.9 (Huvudsatsen för kvadratiska former)

Låt $Q(\vec{x})$ vara en kvadratisk form och $Q(\vec{x})=X_e^t S X_e$, där matrisen S är symmetrisk. Låt vidare $P=\begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \dots & \vec{f}_n \end{bmatrix}$ vara en ON-matris vars kolonner utgörs av parvis ortogonala och normerade egenvektorer till S, svarande mot egenvärdena $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$. Låt vidare $X_f=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^t$ vara koordinatmatrisen för $\vec{x}$ i basen $\{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\dots \vec{f}_n\}$.

Genom transformationen $X_e=PX_f$ öveförs då Q på den **KANONISKA FORMEN**

$$Q(\vec{x})=X_f^t D X_f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\dots+\lambda_n y_n^2$$

Exempel: Diagonalisera $Q(\vec{x})=2x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2$. Ange också variabelbyte som överför den kvadratiska formen på den kanoniska formen (diagonal form).

Lösning:

- $Q(\vec{x})=2x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2=X_e^t S X_e$ alltså $Q(\vec{x})=X_e^t S X_e=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
- $S=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
- Sök egenvärden:

  Sekularpolynomet $det(S-\lambda\cdot I)$ ger : $det(S-\lambda\cdot I)=\overset{\text{övning}}{\dots}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

  Sekularekvationen $det(S-\lambda\cdot I)=0$ ger: $(\lambda-1)(\lambda-3)=0\Leftrightarrow\lambda=1$ eller $\lambda=3$

  Då ges D av $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
- $Q(\vec{x})=2x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2=X_e^t S X_e=X_f^t D X_f=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=y_1^2+3y_2^2$

Fö 12: vad handlar den om?

Kanoniska formen ges av $Q(y_1, y_2) = y_1^2 + 3y_2^2$

- Sök egenvektorer: (för att ange också variabelbyte som överför den kvadratiska formen på den kanoniska formen (diagonal form).

- **λ=1** söker vi lösningar till $(A - 1 \cdot I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ **alltså till** $\begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

  Den utökade matrisen ger:

  $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{(r2+r1)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = x_2$$

  Alltså $x_1 = x_2$, tag t.ex. $x_2 = t, \quad t \neq 0$ och $t \in \Re$.

  Egenvektorerna till **λ=1** ges då av $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **där** $t \neq 0$ och $t \in \Re$.

- **λ=3** söker vi lösningar till $(A - 3 \cdot I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ **alltså till** $\begin{bmatrix} 2-3 & -1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

  Den utökade matrisen ger:

  $$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{(r2-r1)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = -x_2$$

  Alltså $x_1 = -x_2$, tag t.ex. $x_2 = t, \quad t \neq 0$ och $t \in \Re$.

  Egenvektorerna till **λ=3** ges då av $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **där** $t \neq 0$ och $t \in \Re$.

- Summa summarum:

  Egenvektorerna till **λ=1** ges då av $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **där** $t \neq 0$ och $t \in \Re$.

  Tag för **λ=1** t.ex. egenvektor $\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Egenvektorerna till **λ=3** ges då av $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **där** $t \neq 0$ och $t \in \Re$. Tag för **λ=3** t.ex. egenvektor $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fö 12: vad handlar den om?

- Vektorerna $\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är ortogonala och normerade (titta extra på "huvudsatsen för kvadratiska formen", vad som krävs…?)

- Då ges basbytesmatrisen P av:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $X_e = PX_f$ ger variabelbytet $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

dvs. $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{cases}$

- Genom transformationen $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{cases}$ överförs alltså

  $Q(\vec{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$ till den $Q(y_1, y_2) = y_1^2 + 3y_2^2$

- Vi kontrollerar detta genom insättning av uttrycken för x_1 och x_2 i uttrycket till $Q(\vec{x})$ och får

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2\right)^2 =$$

$$= y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 - \left(y_1^2 - y_2^2\right) + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 = y_1^2 + 3y_2^2 = Q(y_1, y_2)$$

Svar: Kanoniska formen ges av $Q(y_1, y_2) = y_1^2 + 3y_2^2$ och variabelbyte som överför den kvadratiska formen på den kanoniska formen är $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{cases}$.

Fö 12: vad handlar den om?

Andragradskurvor

Huvudtyperna (med medelpunkterna i origo):

- Ellips: $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$ ($a = b$ ger cirkeln)
- Hyperbel: $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$ eller $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = -1$
- Parabel: $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$
- Parabel: $x_2 = ax_1^2$ eller $x_1 = ax_2^2$
- Ett par korsade linjer: $x_1^2 - k^2 x_2^2 = 0$

Exempel: Beskriv andragradskurvan $6x^2 + 4xy + 3y^2 = 1$ så tydligt som möjligt. Bestäm även de punkter (x, y) på kurvan, som ligger närmast origo.

Lösning: Vi betraktar den kvadratiska formen

$$Q(x, y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$$

Dess matris är

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vars egenvärden är $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 2$. Vektorerna $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ är ortogonala, men ej normerade, egenvektorer till S.

Normering ger

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Fö 12: vad handlar den om?

Genom transformationen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

$$dvs.$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} u + \dfrac{1}{\sqrt{5}} v \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} u - \dfrac{2}{\sqrt{5}} v \end{cases}$$

Överförs alltså Q till den kanoniska formen $Q(u,v) = 7u^2 + 2v^2$.(kan kontrollers genom att insättning av uttrycken för x och y i uttrycket för Q).

Kurvans ekvation i koordinatsystemet $\overrightarrow{f_1}\,\overrightarrow{f_2}$ är alltså

$$7u^2 + 2v^2 = 1$$

$$eller$$

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Detta är ekvationen för en ellips med halvaxlarna $\frac{1}{\sqrt{7}}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Storaxeln ligger i riktningen $\overrightarrow{f_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och lillaxeln i riktningen $\overrightarrow{f_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Observera nu att för $u = 0$ blir $\frac{v^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow v^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow v = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ och respektive för $v = 0$ blir $\frac{u^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow u^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 \Leftrightarrow u = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$.

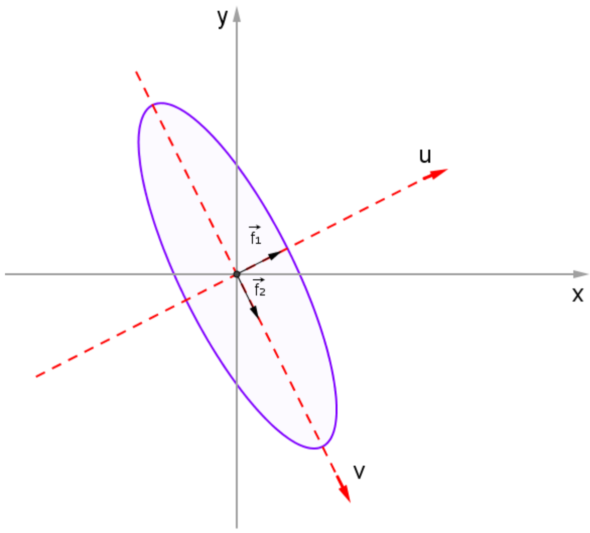
Kortaste avståndet till origo är $\frac{1}{\sqrt{7}}$ vilket inträffar då $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs då

Fö 12: vad handlar den om?

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

dvs.

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \end{cases} \text{ eller } \begin{matrix} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{7}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{7}} \end{matrix} \text{ alltså } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$



Svar: Kortaste avståndet till origo är $\frac{1}{\sqrt{7}}$ l.e. De punkter som ligger närmast origo

är $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$.