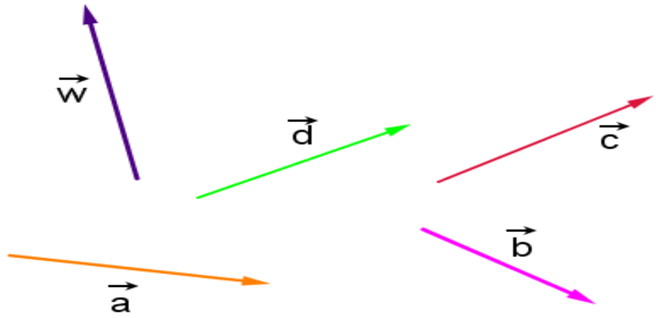
Fö 2 : vad handlar den om?

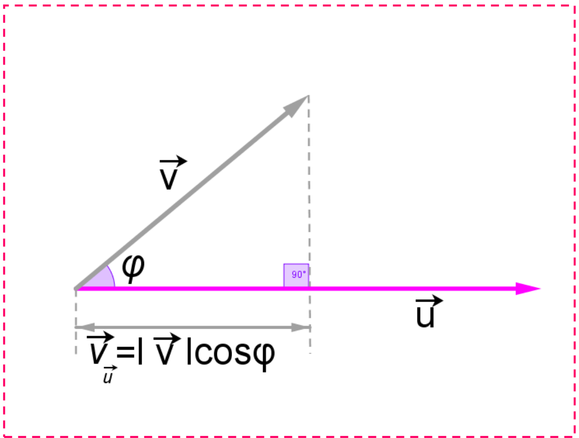
- Skalärprodukt.
- Exempel
- Projektionssatsen.
- Vektorprodukt.



<u>Skalärprodukt</u>

- En operation på två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vars resultat är en skalär.
- Definition:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$$



- Observera att $\vec{v}_{\vec{u}} = |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$ är $\vec{v}$:s projektion (ortogonalprojektion) på $\vec{u}$ som sedan multipliceras med längden av vektor $\vec{u}$, alltså med $|\vec{u}|$.

- Exempel 1:

Om $|\vec{u}| = 1, |\vec{v}| = 2$ och vinkel mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är $\frac{\pi}{4}$ så är

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi = 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Fö 2 : vad handlar den om?

- Exempel 2:

  Vad blir skalärprodukten om $\vec{u} = \vec{v}$?

  Tänk så här:

  Om $\vec{u} = \vec{v}$ medför det att de har samma storlek alltså $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

  Om $\vec{u} = \vec{v}$ medför det att de är parallella och har samma riktning, alltså vinkeln $\varphi = 0$. (vinkeln anges i radianer här).

  Då blir

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0 = (|\vec{u}|)^2 \cdot 1 = (|\vec{u}|)^2$$

  Svar: Skalärprodukten blir lika med $(|\vec{u}|)^2$, kan skrivas $|\vec{u}|^2$

- Exempel 3:

  Vad betyder att $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$?

  Tänk så här:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi = 0$$

  Du har väl koll på korrekta beteckningar för respektive skalärprodukt och multiplikationstecken? Eller?

  Tänk på att din notation visar hur mycket du förstår 😊

  alltså

$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi = 0$$

  Vi vet att en produkt är noll om en av faktorerna är noll. Detta innebär att

$$|\vec{u}| = 0 \quad eller \quad |\vec{v}| = 0 \quad eller \ \cos\varphi = 0$$

  och vidare

$$|\vec{u}| = 0 \quad eller \quad |\vec{v}| = 0 \quad eller \ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

  Om $\varphi = \frac{\pi}{2}$ är vektorerna ortogonala (vinkelräta) .

  Svar: Om skalärprodukten är noll, så är antingen vektorerna ortogonala eller så är antingen $\vec{u}$ eller $\vec{v}$ nollvektorn.

Fö 2 : vad handlar den om?

Räknelagar

- $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ (kommutativa lagen)
- $(\beta \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = \beta \cdot (\vec{v} \bullet \vec{u})\ ,\quad \beta \in \Re$
- $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ (distributiva lagen)

Sats 1.3

- Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer så att $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$
- $\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$

Bevis:

$$\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y = x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y\ ,\ \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y$$

Alltså blir

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y) \bullet (x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y) =$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \vec{e}_x \bullet \vec{e}_x + x_1 \cdot y_2 \cdot \vec{e}_x \bullet \vec{e}_y + y_1 \cdot x_2 \cdot \vec{e}_y \bullet \vec{e}_x + y_1 \cdot y_2 \cdot \vec{e}_y \bullet \vec{e}_y =$$

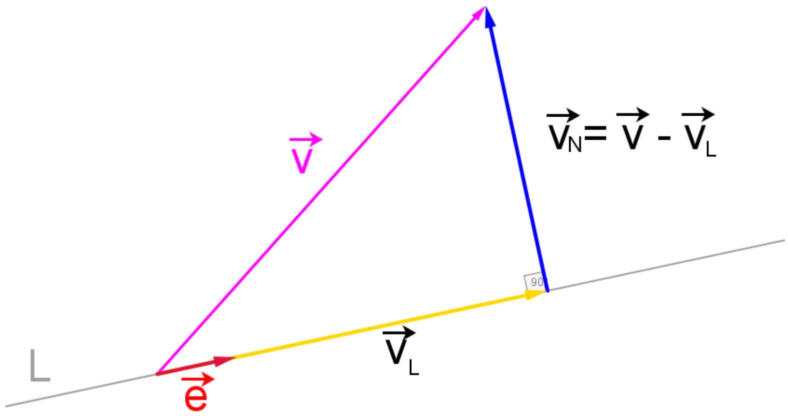
$$= \left[\begin{array}{l} \vec{e}_x \bullet \vec{e}_x = 1\ ,\ ty\ \ \vec{e}_x // \vec{e}_x \ \ och\ \ har\ \ samma\ \ riktning\ och\ |\vec{e}_x| = 1 \\ \vec{e}_x \bullet \vec{e}_y = 0\ ,\ ty\ \ \vec{e}_x \perp \vec{e}_y\ \ ,obs : \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ \vec{e}_y \bullet \vec{e}_x = 0, ty\ \ \vec{e}_x \perp \vec{e}_y\ \ ,\ obs : \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ \vec{e}_y \bullet \vec{e}_y = 1,\ ty\ \ \vec{e}_y // \vec{e}_y \ \ och\ \ har\ \ samma\ \ riktning\ och |\vec{e}_y| = 1 \\ \ \end{array} \right] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

vssv 

Fö 2 : vad handlar den om?

Projektionssatsen

- Låt $\vec{v}$ vara en vektor och L en linje l, där L är parallell med en enhetsvektor $\vec{e}$



- Då gäller att $\vec{v}_L = (\vec{v} \bullet \vec{e}) \cdot \vec{e}$

Var noga med att skilja på tecken för skalärprodukt som är " • " och på tecken av en "vanligt" multiplikation som är " · "

Detta är super truper viktigt! ☺

Bevis:

Då $\vec{e} \,//\, \vec{v}_L \Rightarrow \vec{v}_L = t \cdot \vec{e}$

Vidare är $\vec{v}_N = \vec{v} - \vec{v}_L$ är ortogonal mot $\vec{e}$

alltså $\vec{v}_N = \vec{v} - \vec{v}_L \perp \vec{e} \Rightarrow \vec{v}_N \bullet \vec{e} = 0 \Rightarrow (\vec{v} - \vec{v}_L) \bullet \vec{e} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \vec{e} - \vec{v}_L \bullet \vec{e} = 0$ insättning av

$\vec{v}_L = t \cdot \vec{e}$ ger $\vec{v} \bullet \vec{e} - t \cdot \vec{e} \bullet \vec{e} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} obs: \\ \vec{e} \bullet \vec{e} = 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \vec{e} - t = 0 \Leftrightarrow t = \vec{v} \bullet \vec{e}$

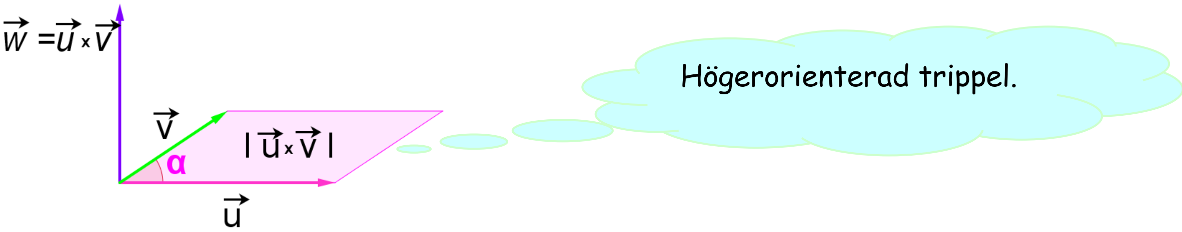
Insättning av $t = \vec{v} \bullet \vec{e}$ i $\vec{v}_L = t \cdot \vec{e}$ ger att $\vec{v}_L = (\vec{v} \bullet \vec{e}) \cdot \vec{e}$

vssv

Fö 2 : vad handlar den om?

<u>Vektorprodukt / kryssprodukt</u>

- Två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ som tillhör $\Re^3$ som " kryssmultipliceras" ger upphov till en ny tredimensionell vektor $\vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v})$ som är ortogonal mot $\vec{u}$ och $\vec{v}$.



- Definition för <u>längden</u> av vektor $\vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v})$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$$

- Längden av denna vektorn ger arean av en parallellogram som vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ spänner upp (se bilden)

- Vet man de kartesiska koordinaterna för två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$, så kan man beräkna vektorprodukten på följande sätt:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

(memorera inte!!! minnesregeln visas på föreläsningen)