Om linjer, plan och avstånd

- Linjer i planet/rummet
- Plan i rummet
    - ✓ Parameterform
    - ✓ Normalform
    - ✓ Exempel
- Avstånd

<u>Linjer i planet/rummet</u>

Vad behöver vi veta?

<u>Planet (endast)</u>

- riktningskoefficient
- en punkt

Ex.: $y = 1 - 3x$

Alternativt (på normalform)

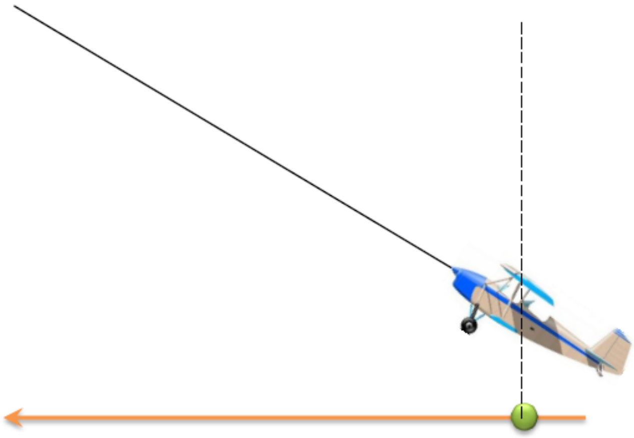
- normalriktning
- en punkt

Ex.: $4x + 7y = 12$

<u>Planet / rummet</u>

- antigen två punkter
- eller riktning och en punkt

Ekvation på parameterform



t (en parameter)

Om linjer, plan och avstånd

- Planet/rummet: Linjens ekvation på **parameterform** $(t \in \Re)$.

  L:s ekvation ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x \end{pmatrix}$ alltså $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{v}$

- t kallas för en parameter $(t \in \Re)$

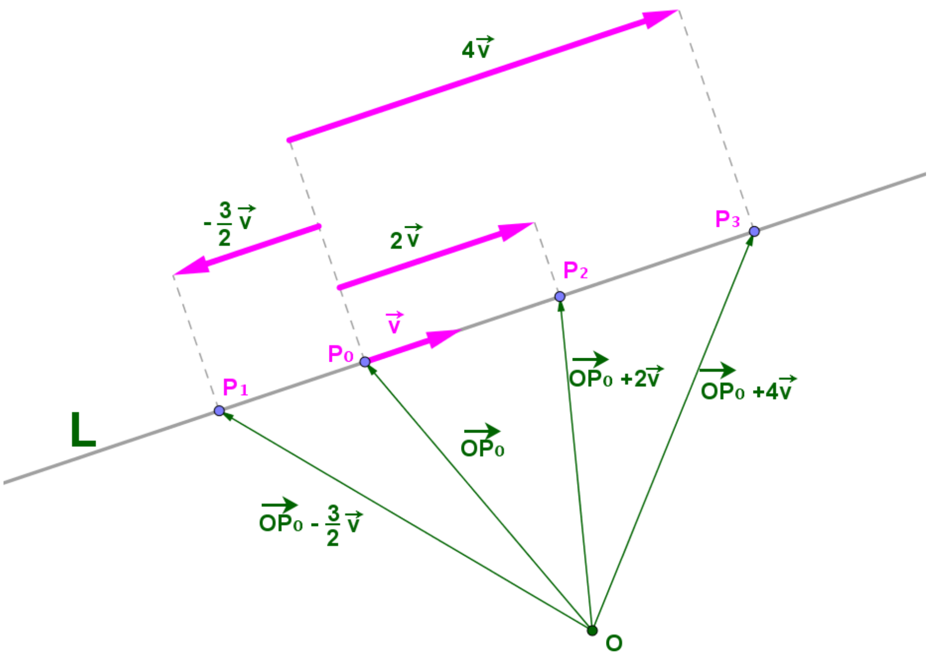
- $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ är koordinaterna för en godtycklig <u>punkt</u> på linjen där $\overrightarrow{OP}$ är ortsvektorn med startpunkt i origo och slutpunkt i P, därför har den samma koordinarer som P

- $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ är koordinaterna för en given <u>punkt</u> på linjen där $\overrightarrow{OP_0}$ är ortsvektorn med startpunkt i origo och slutpunkt i P_0, därför har den samma koordinarer som P_0

- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x \end{pmatrix}$ är koordinaterna för en <u>riktningsvektorn</u> för linjen

- Bearbeta bilden för bättre förståelse. Ortsvektorer för punkter på linjen då $t = -\frac{3}{2}, 0, 2, 4$

- O är en fix referenspunkt som kallas ofta <u>origo</u>



Om linjer, plan och avstånd

- Exempel 1: Låt L vara linjen $y = 2x - 3$. Ange linjens ekvation på parameterform.

Lösningsskiss:

I två dimensioner är L:s ekvation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ där $(t \in \Re)$.

Låt t.ex. $x = t$. Insättning i $y = 2x - 3$ ger då att $y = 2t - 3$.

Alltså $\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \cdot t + 0 \\ y = 2 \cdot t - 3 \end{cases}$ som vi kan skriva som

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot t \\ 2 \cdot t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ som är den sökta parameterformen för given linje i k: formen.

Svar: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ där $t \in \Re$.

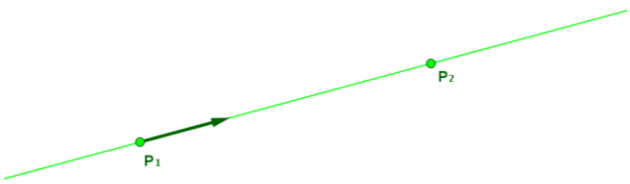
Kommentar: Vi ser att linjen går genom punkten $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ och har riktningsvektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vidare insättning av t.ex. $t = 3$ ger oss en annan punkt på linjen som ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Du kan alltid kontrollera dina lösningar. Om punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ligger på linjen $y = 2t - 3$ så bör dess koordinater uppfylla linjens ekvation. Kontrollera!

- Exempel 2: Linjen L går genom punkter $(2, \ 3, \ -5)$ och $(0, \ 1, \ 1)$. Ange linjens ekvation på parameterform.

Lösningsskiss:

Inför beteckningar:

$P_1 = (0, \ 1, \ 1)$ och $P_2 = (2, \ 3, \ -5)$.



Om linjer, plan och avstånd

L:s ekvation ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x \end{pmatrix}$. Vi vet att $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ är koordinaterna för given punkt på linjen, tag då t.ex. $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vidare är $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x \end{pmatrix}$ är linjens riktningsvektorn , alltså en vektor parallell med

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [slutpunktens\ \ koordinater\text{ - }startpunktens\ \ koordinater] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x \end{pmatrix} // \overrightarrow{P_1P_2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, så ta t.ex. $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Varför?om du undrar? Spelar det någon roll hur lång är riktningsvektorn? NÄHÄ ☺ ...

Till slut för $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ blir den sökta linjens ekvation efter insättningen i $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x \end{pmatrix}$ följande $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ där $t \in \Re$.

Svar: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ där $t \in \Re$.

Kommentar: Du kan alltid kontrollera om ditt svar är korrekt.

Insättning av $t = 0$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ger oss punkten $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Kontrollera!

Insättning av $t = 2$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ger oss punkten $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Kontrollera!

Om linjer, plan och avstånd

- Exempel 3: Avgör om linjer

$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a. skär varandra

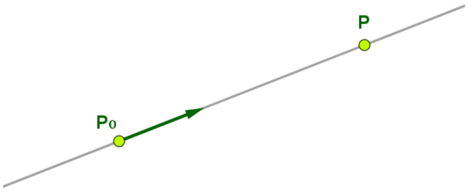
b. är parallella

Övning! (försök lösa uppgiften på egen hand, lösning kommer att uppdateras så att du kommer kunna jämföra 😊)

Plan i rummet

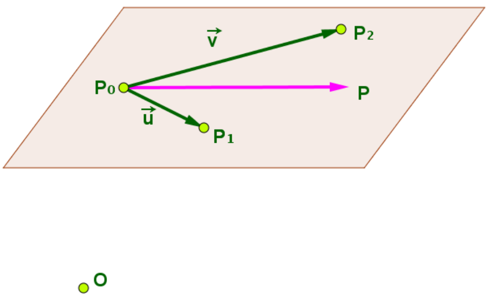
Vad behöver vi veta?

- För en linje räcker det med två punkter



$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{v}$, **OBS!** längden av riktningsvektorn är ointressant

- För ett plan räcker det med tre punkter $(P_0, P_1, P_2 \quad nedan)$

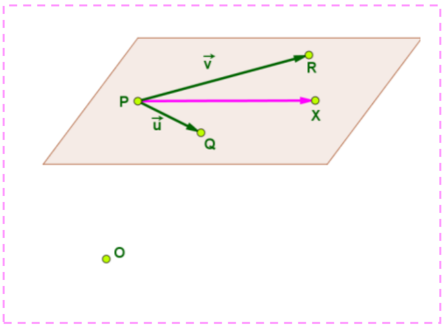


$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{OP_0} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$ **(parameterform)**

Om linjer, plan och avstånd

- Exempel 1: Ange en ekvation på parameterform för planet som går genom punkter $P=(1,\ \ 2,\ \ 0)$, $Q=(2,\ \ 2,\ \ 1)$ och $R=(-1,\ \ 0,\ \ 0)$.

Lösningsskiss: (tips: skissa alltid enkel figur som ska hjälpa dig att visualisera, inför tydliga beteckningar)



Vektorerna $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}2-1\\2-2\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

och

$\vec{v}=\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}-1-1\\0-2\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$

ligger i planet och är icke-parallella (tänk på att två parallella vektorer kan omöjligt spänna upp ett plan alltså *never ever for ever*)

Med hjälp av tidigare given parameterform $\overrightarrow{0P}=\overrightarrow{OP_0}+s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$ får vi då att

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} \text{ där } s,t\in\Re$$

Svar: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ där $s,t\in\Re$

Kommentar: Svaret kan anges på oändligt många olika sätt. Här är några svar till som beskriver exakt samma plan:

- $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ där $s,t\in\Re$, kan du förklara varför är svaret korrekt?

Om linjer, plan och avstånd

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $s,t \in \Re$, kan du förklara varför är svaret korrekt?

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $s,t \in \Re$, kan du förklara varför är svaret korrekt?

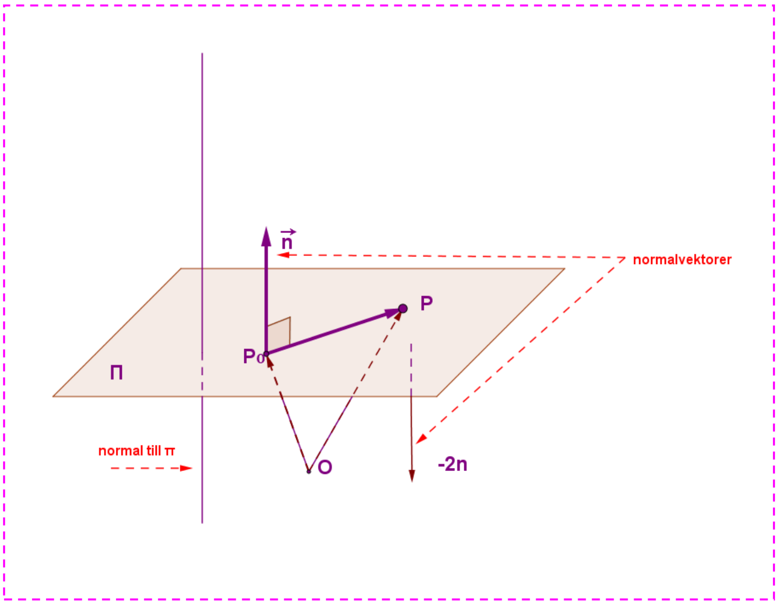
  Lär dig att kontrollera!

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $s,t \in \Re$, kan du förklara varför är svaret korrekt?

  Lär dig att kontrollera!

Planets ekvation på normalform

Till varje plan i rummet hör flera sinsemmellan paralella normalriktningar, t.ex..



- $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ är en normalvektor

- $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ är given punkt i planet

och $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ är godtycklig

punkt i planet

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \bullet \vec{n} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

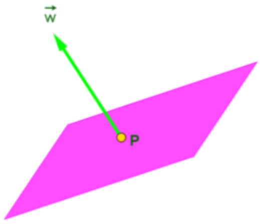
$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

Om linjer, plan och avstånd

- Låt nu $\left(-Ax_0 - By_0 - Cz_0\right) = D$, där D är en konstant.
- För $\left(-Ax_0 - By_0 - Cz_0\right) = D$ får vi <u>ekvationen för planet</u> π på <u>normalform</u>

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

- Exempel 2: Ange en ekvation på normalform för planet som går genom punkten $P = (1, \ -1, \ 2)$ och vinkelrät mot $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Lösningsskiss:

Vi vet att $\vec{w} // \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$. Så tag t.ex $\vec{w} = \vec{n} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Planets ekvation $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ $\Rightarrow 1 \cdot x + 2y + 3z + D = 0$

Vi bestämmer D genom att utnyttja att given punkts koordinater måste uppfylla planets ekvation om punkten ligger i planet.

Insättning av $P = (1, \ -1, \ 2)$, punktens koordinater i $1 \cdot x + 2y + 3z + D = 0$ ger då

$1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + D = 0 \Leftrightarrow D = -5 \Rightarrow$ planets ekvation ges av $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

Om linjer, plan och avstånd

- Exempel 3: Låt $\pi_1 : x-2y-z=0$ och $\pi_2 : 2x+y-z=4.$. Bestäm och beskriv geometriskt den punktmängd som tillhör båda planen.

Lösningsssisss: De punkter som tillhör båda planen uppfyller systemet.

$$\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y-z=4 \end{cases}$$

$(ekv1 - ekv2)$ ger $x-2y-z-(2x+y-z)=0-4 \Leftrightarrow -x-3y=-4 \Leftrightarrow x=4-3y$.

Låt $y=t$, där $t \in \Re$ då blir $x=4-3t$. Vidare insättning av $y=t$ och $x=4-3t$ i t.ex. $ekv1$ ger

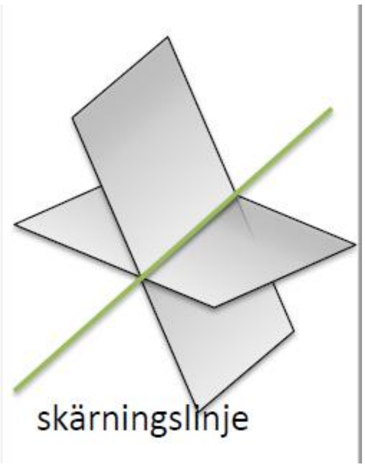
$(4-3t)-2t-z=0 \Leftrightarrow z=(4-3t)-2t \Leftrightarrow z=4-5t$.

Alltså vi har lyckats att uttrycka x, y och z med hjälp av parameter t,

$$\begin{cases} x=4-3t \\ y=t \\ z=4-5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3\cdot t \\ y=0+1\cdot t \\ z=4-5\cdot t \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$ där $t \in \Re$, som är

ekvation för en linje gående genom punkten $P=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

och som har riktningsvektorn $\vec{v}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.



Svar: Skärningsmängd är en linje $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ där.

Kommentar: Uppgiften kan lösas på motsvarande sätt, dock tänk på att du är fri att bestämma vilken av variablerna ska väljas till parametern. Du kommer alltid till samma svar om du tänker korrekt i övrigt. Tänk på tidigare exempel där svaret kan ha ollika "skepnader" och ändå beskriva exakt samma objekt.

Och du, du kan alltid kontrollera ditt svar.

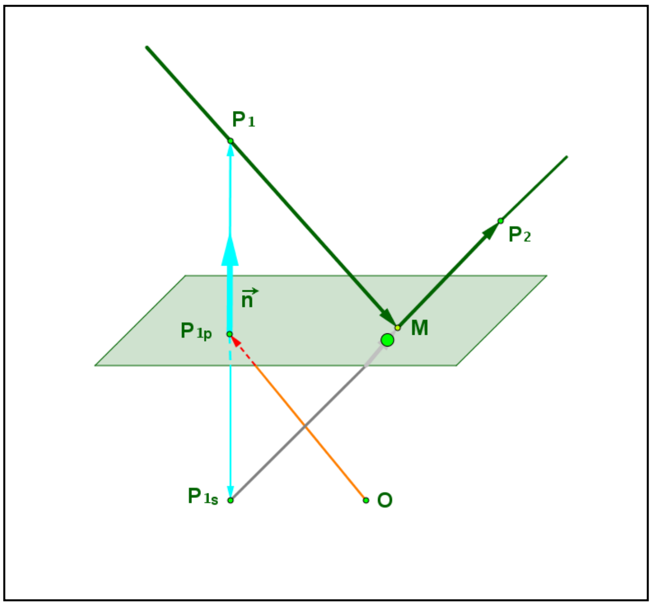
Om linjer, plan och avstånd

Insättning av respektive $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$ i respektive $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$ ska ge dig sanna samband. Kontrollera ☺

- Exempel 4: En ljusstråle går genom punkten $P_1 = (7, \ -1, \ 7)$, reflekteras i planet $\pi : 2x - y + 4z = 1$ och går sedan genom punkten $P_2 = (11, \ 11, \ 1)$. Var träffar ljusstrålen planet?

Lösningsidé/Lösningsskiss: (rita <u>alltid</u> figur att "tänka med" och inför beteckningar, obs: alltid ett måste vid examinationen, dina redovisningar skall vara kompletta)

Den sökta punkten M (bilden) är skärningspunkten av linjen som går genom P_{1s} och P_2 och planet π.



- Sök P_{1p}:

$$\overrightarrow{0P_{1p}} = \overrightarrow{0P_1} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 2t \\ -1 - t \\ 7 + 4t \end{pmatrix}$$

- P_{1p} ligger i planet $\pi : 2x - y + 4z = 1$:

$$2(7 + 2t) - (-1 - t) + 4(7 + 4t) = 1 \Leftrightarrow t = -2$$

$$t = -2 \Rightarrow \overrightarrow{0P_{1p}} = \begin{pmatrix} 7 - 4 \\ -1 + 2 \\ 7 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{1p} = (3, \ 1, \ -1) \ .$$

$$\overrightarrow{P_{1p}P_1} = \begin{pmatrix} 7 - 3 \\ -1 - 1 \\ 7 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{0P_{1s}} + \overrightarrow{P_{1p}P_1} = \overrightarrow{0P_{1p}}$$

(sambandet $\overrightarrow{0P_{1s}} + \overrightarrow{P_{1p}P_1} = \overrightarrow{0P_{1p}}$ på grund av reflektionen måste $\overrightarrow{P_{1s}P_{1p}} = \overrightarrow{P_{1p}P_1}$)

Vidare $\overrightarrow{0P_{1s}} + \overrightarrow{P_{1p}P_1} = \overrightarrow{0P_{1p}} \Leftrightarrow \overrightarrow{0P_{1s}} = \overrightarrow{0P_{1p}} - \overrightarrow{P_{1p}P_1} \Rightarrow \overrightarrow{0P_{1s}} = \begin{pmatrix} 3 - 4 \\ 1 - (-2) \\ -1 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Om linjer, plan och avstånd

- Sök M :

$$\overrightarrow{0M}=\overrightarrow{0P_{1s}}+s\cdot\overrightarrow{P_{1s}P_2}\Rightarrow\overrightarrow{0M}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-9\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}11-(-1)\\11-3\\1-(-9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+12s\\3+8s\\-9+10s\end{pmatrix}\Rightarrow M=(-1+12s,3+8s,-9+10s)$$

Låt $2s=u$ (lättare att räkna)

$M=(-1+12s,3+8s,-9+10s)\Rightarrow M=(-1+6u,3+4u,-9+5u)$

M ligger i planet $\pi: 2x-y+4z=1$:

$$2(-1+6u)-(3+4u)+4(-9+5u)=1\Leftrightarrow u=\frac{3}{2}$$

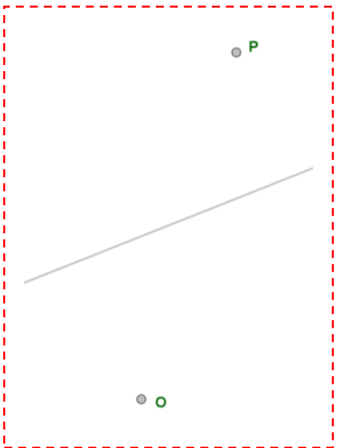
$$u=\frac{3}{2}\Rightarrow M=\left(-1+6\cdot\frac{3}{2},3+4\cdot\frac{3}{2},-9+5\cdot\frac{3}{2}\right)=\left(8,\quad 9,\quad -\frac{3}{2}\right)$$

Svar: Ljusstrålen träffar planet i punkten $\left(8,\quad 9,\quad -\frac{3}{2}\right)$.

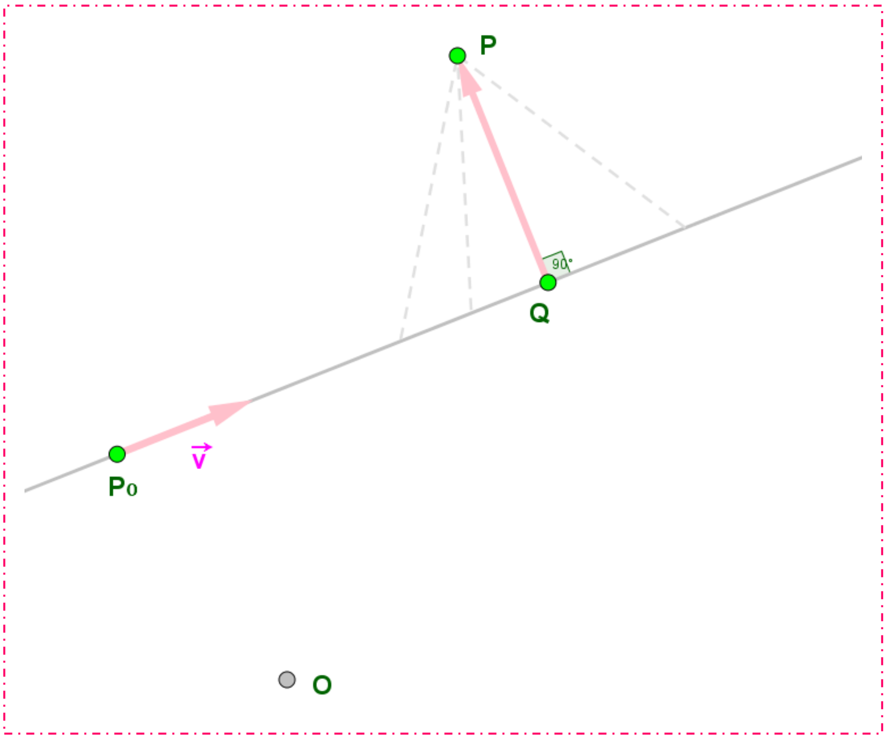
Avstånd från en linje till en punkt

- Exmpel: Bestäm den punkt Q på linjen $L:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ som ligger närmast $P=(2,\quad 1,\quad 2)$ samt avståndet mellan P och Q.

Lösningsskiss:



Om linjer, plan och avstånd



☞ $\overrightarrow{QP} \perp \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{QP} \bullet \vec{v} = 0$

☞

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ 2+t \end{pmatrix}$$

och $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

☞ $\overrightarrow{QP} \perp \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{QP} \bullet \vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \\ 2+t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1-t+1-t-2-t=0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$

☞ för $t = -\frac{2}{3}$ ges Q:s koordinater av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

☞ för $t = -\frac{2}{3}$ blir $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Om linjer, plan och avstånd

$$\left|\overrightarrow{QP}\right| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\| = \left| \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{3} \right| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3}\sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 4^2} = \frac{1}{3}\sqrt{42} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

Svar: Q:s koordinater är $\frac{1}{3}(5, \ -2, \ 2)$, $\left|\overrightarrow{QP}\right| = \frac{\sqrt{42}}{3}$ l.e.

Kommentar: Försök att ta fram en annan lösning ☺. Använd bilden nedan. Observera att vektor $\overrightarrow{P_0Q}$ är ortogonalprojektion av $\overrightarrow{P_0P}$ på $\vec{v}$ (L).

Alltså $\overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{P_0P}_{//\vec{v}}$. Har du $\overrightarrow{P_0Q}$ som har startpunkten

P_0 så hittar du slutpunktens koordinater….osv.

Lycka till!