Fö 4 : vad handlar den om?

- Vektorer av dimensionen n, $\Re^n$
- Matriser
    - ✓ Räkneoperationer och räknelagar
- Determinant av ordning 2 och invers matris till matris A_{2x2}.

Vektorer av dimensionen n, $\Re^n$

Räkna med vektorer av dimension n

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Då gäller

$$\lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \quad \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + \ldots + (x_n)^2}$$

Fö 4 : vad handlar den om?

En linje i $\Re^n$ kan beskrivas som $\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0P_0} + t \cdot \vec{v}$.

Låt t.ex. $P_0 = (x_1, \ x_2, \ x_3, \ \dots, \ x_n)$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ vara riktingsvektorn då gäller att:

$$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0P_0} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad , t \in \Re$$

ON-baser i $\Re^n$

Definition: En bas i $\Re^n$ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$ kallas OrtoNormerad (ON) om basvektorerna

- Är parvis ortogonala , (Orto…)
- Är enhetsvektorer, dvs har längd 1 (…Normerad)
- t.ex. standardbasen : $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
- Exempel: Om $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ är en ON-bas i planet så gäller

$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = |\vec{e}_1|^2 = 1^2 = 1$$
$$\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = |\vec{e}_2|^2 = 1^2 = 1$$
$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0$$

(inga nyheter här, eller hur?)

- **Men hur ser det ut i $\Re^3$ eller i $\Re^n$?** (din övning)

Fö 4 : vad handlar den om?

- **Exempel:** Skriv $\vec{u}$ som en summa av $\alpha\cdot\vec{v}$ och $\beta\cdot\vec{w}$ (detta kallas att man skriver $\vec{u}$ som en linjärkombination av $\vec{v}$ och $\vec{w}$, ser Fö1 anteckningar) då

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-7\\1\\3\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix},\ \vec{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Lösningsskiss: Vi söker koefficienter α och β så att $\vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}+\beta\cdot\vec{w}$ alltså

$$\begin{pmatrix}2\\-7\\1\\3\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2\\-7\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha+\beta\\-\alpha+\beta\\3\alpha+2\beta\\\alpha\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta=2\\-\alpha+\beta=-7\\3\alpha+2\beta=1\\\alpha=3\end{cases}$$

Isättning av $\alpha=3$ de öviga 3 ekvationer ger $\begin{cases}6+\beta=2\\-3+\beta=-7\\9+2\beta=1\\\alpha=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-4\\\beta=-4\\\beta=-4\\\alpha=3\end{cases}\Rightarrow$

vi kan skriva $\vec{u}$ som en linjärkombination av $\vec{v}$ och $\vec{w}$ på följande sätt

$$\vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}+\beta\cdot\vec{w}\Rightarrow\begin{bmatrix}\alpha=3\\\beta=-4\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{u}=3\vec{v}-4\vec{w}$$

Svar: $\vec{u}=3\vec{v}-4\vec{w}$

Matriser

Definition: Låt r och k vara heltal ≥ 1. En $r\times k$ - matris består av $r\cdot k$ stycken element ordnade i ett rektangulärt schema enligt nedan:

$$A_{r\times k}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{r1}&\cdots&a_{rk}\end{bmatrix},$$ $r\times k$ kallas för matrisens format eller typ

- Exempel:

1. $\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&r_{13}\end{bmatrix}_{1\times 3}$, observera indexerna, vi har en rad och tre kolonner, matrisen kallas för en **radmatris**

Fö 4 : vad handlar den om?

2. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ **kvadratiska matriser**

3. $\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}_{3\times 1}$, vi har tre rader och en kolonn, matrisen kallas för en **kolonnmatris**

- Element a_{ij} : där i anger i vilken rad och j i vilken kolonn element står
- Matriser betecknas med stora bokstäver: $A, B, \ldots$
- Diagonalmatriser, t.ex.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

<u>Räkneoperationer</u>

Definitioner:

- **(Likhet)** Matriser $A=(a_{ij})_{r\times k}$ och $B=(b_{ij})_{r\times k}$ är **lika**, dvs $A=B$ om $a_{ij}=b_{ij}$ för alla $i,j: 1\le i\le r,\ 1\le j\le k$

- **(Addition)** Låt $A=(a_{ij})_{r\times k}$ och $B=(b_{ij})_{r\times k}$ vara matriser av samma typ. **Summan** av A och B definieras som

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{r\times k}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1k}+b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}+b_{r1} & \cdots & a_{rk}+b_{rk} \end{bmatrix}_{r\times k}$$

- **(Multiplikation med reellt tal)** Låt $A=(a_{ij})_{r\times k}$ och $\lambda\in\Re$. **Produkten** av A och λ definieras som

$$\lambda\cdot A=(\lambda\cdot a_{ij})_{r\times k}=\begin{bmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \cdots & \lambda\cdot a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\cdot a_{r1} & \cdots & \lambda\cdot a_{rk} \end{bmatrix}_{r\times k}$$

Fö 4 : vad handlar den om?

- Exempel 1

(Addition)

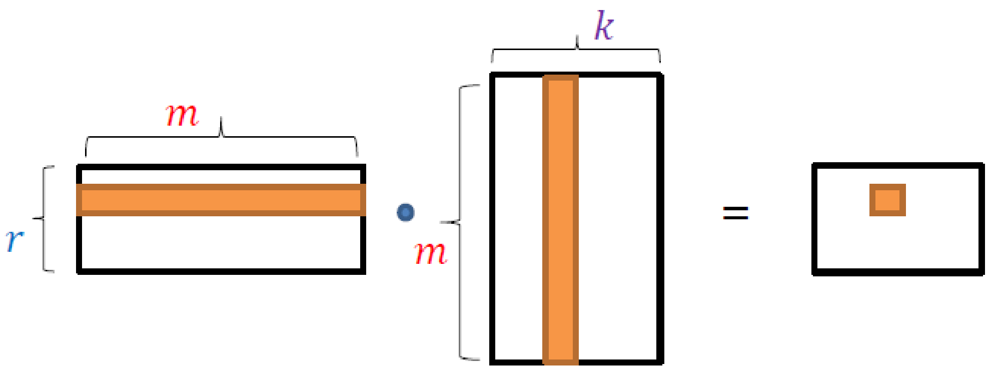
Låt $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3}$ och $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3}+\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 6\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & 0 & 4\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

(Multiplikation med reellt tal/bryta ut reellt tal)

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & -4 & 8\\ 6 & -2 & 2 & 0\\ -4 & 4 & 6 & 3\end{bmatrix}_{3\times 4}=2\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 4\\ 3 & -1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 3 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}_{3\times 4}$$

- **(Matrismultiplikation)**



Låt $A=(a_{ij})_{r\times m}$ och $B=(b_{ij})_{m\times k}$. Då definieras **produkten** A och B som $r \times k$ matris C där $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{im}b_{1m}$

OBS: Det är enklast att tänka på att element $c_{ij}=(rad\ \ i\ )\bullet(kolonn\ \ j\ )$ fås som en **skalär produkt** av rad i i mtris A och kolonn j i matris **B** om de betraktas som en vektor respektive (alltså respektive rad och respektive kolonn betraktas som vektorer)

Fö 4 : vad handlar den om?

- Exempel 2:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&0\\2&1&2\end{bmatrix}_{3\times 3}\cdot\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\\0&1\end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Då ges t.ex. element

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&0\\\boxed{2\quad 1\quad 2}\end{bmatrix}_{3\times 3}\cdot\begin{bmatrix}1&\boxed{3}\\-1&\boxed{2}\\0&\boxed{1}\end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&\boxed{c_{32}}\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$c_{32}=(\text{"rad 3" i } A)\bullet(\text{"kolonn 2" i } B)=\begin{bmatrix}\text{obs : vi}\\\text{betraktar}\\\text{respektive}\\\text{rad}\\\text{kolonn}\\\text{som}\\\text{vektorer}\\\text{här}\end{bmatrix}=(2,\ \ 1,\ \ 2)\bullet(3,\ \ 2\ \ 1)=6+2+2=10$$

OBS: typen av matriserna har är viktigt för att multiplikationen skall vara definierad! Alltså produkten är definierad <u>om och endast om</u> antalet kolonner i den första matrisen är lika med antalet rader i den andra matrisen!

OBS:I detta fall är produkt $B\cdot A$ ej definierad!

Vi räknar vidare ☺

Fö 4 : vad handlar den om?

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&0\\2&1&2\end{bmatrix}_{3\times3}\cdot\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\\0&1\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}(1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot0)&(1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1)\\(1\cdot1+0\cdot(-1)+0\cdot0)&(1\cdot3+0\cdot2+0\cdot1)\\(2\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot0)&(2\cdot3+1\cdot2+2\cdot1)\end{bmatrix}_{3\times2}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1&10\\1&3\\1&10\end{bmatrix}_{3\times2}$$

Matrisprodukt skiljer sig från produkt mellan reella tal:

$$A\cdot B\neq B\cdot A$$

Likheten gäller om och endast om matriserna är kommutativa.

- För kvadratiska matriser defineras **heltalpotens** på samma sätt som för rella tal, dvs om A är $n\times n$ matris så defineras

$$A^2=A\cdot A,\ \ A^3=A\cdot A\cdot A=A^2\cdot A=A\cdot A^2\ \text{ etc}$$

- **Enhetsmatriser** (enbart ettor står på huvuddiagonalen övriga element är 0, kvadratiska matriser):

$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}_{2\times2},\ I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{3\times3}$$ etc , (betecknas med I)

- Exempel 3:

$$A\cdot I=\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\\0&1\end{bmatrix}_{3\times2}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}_{2\times2}=\begin{bmatrix}(1\cdot1+3\cdot0)&(1\cdot0+3\cdot1)\\(-1\cdot1+2\cdot0)&(-1\cdot0+2\cdot1)\\(0\cdot1+1\cdot0)&(1\cdot0+1\cdot1)\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\\0&1\end{bmatrix}_{3\times2}=A$$

- Produkt av en matris A och en kolonnmatris B kan skrivas som en linjärkombination av A:s kolonner och koefficienterna i linjärkombinationen är precis elementen i B. Låt t.ex.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2&3\\5&4\end{bmatrix}_{2\times2}\cdot\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}_{2\times1}=\begin{bmatrix}2\cdot7+3\cdot9\\5\cdot7+4\cdot9\end{bmatrix}_{2\times1}=7\cdot\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}_{2\times1}+9\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}_{2\times1}$$

Fö 4 : vad handlar den om?

- Låt A,B,C vara matriser av samma typ.

  För **addition** av matriserna gäller:

  1. $A+B=B+A$
  2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
  3. Det finns en matris av varje typ $r\times k$ som kallas **nollmatrisen** och tecknas 0 sådan att för alla $r\times k$- matriser A gäller $A+0=A$
  4. Till varje $r\times k$ - matris A finns en $r\times k$ - matris A' sådan att $A+A'=0.$

- Låt A,B,C vara matriser för vilka respektive operationer är definierade.

  För **multiplikation** av matriserna gäller:

  1. $(AB)C=A(BC)$
  2. $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB),\ \lambda\in\Re$
  3. $A(B+C)=AB+AC$ och $(B+C)A=BA+CA$
  4. $IA=AI=A,$ där A är en kvadratisk matris och I är enhetsmatrisen av samma typ som A

Transporant och transponering

Låt $A=(a_{ij})_{r\times k}$ vara $r\times k$ - matris.

$k\times r$ - matrisen $A^t=(a^t{}_{ij})_{k\times r}$ kallas **transponat** av A och definieras ur A genom att

$$a^t{}_{ij}=a_{ji} \text{ för alla } i,j:\ 1\le i\le r,\ 1\le j\le k$$

- **Exempel 3:**

$$A=\begin{bmatrix}1 & \pi\\ 2 & e\\ 3 & \ln 2\end{bmatrix}_{3\times 2}, \qquad A^t=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ \pi & e & \ln 2\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Fö 4 : vad handlar den om?

- Räknelagar för transponering
  - $(A+B)^t = A^t + B^t$
  - $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
  - $\left(A^t\right)^t = A$
  - $(AB)^t = B^t A^t$ (observera ordningen)
  - En (kvadratisk) matris A kallas symmetrisk om $A^t = A$

<u>Determinant av ordning 2 och inversen till matrisen A_{2x2}.</u>

- Determinant av ordning 2 :

Låt $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Då ges determinanten av A som

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

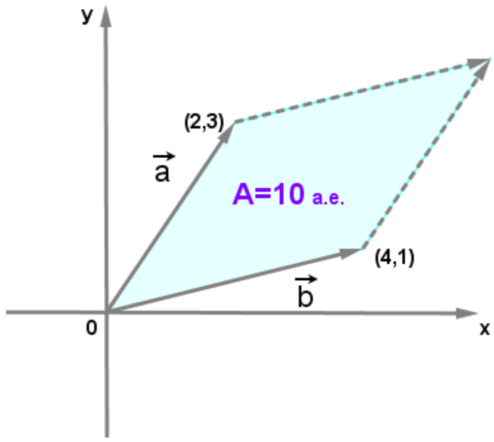
$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ eller $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ska uppfattas som en <u>beteckning</u> för $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

- Exempel :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \ .$$

Fö 4 : vad handlar den om?

Detta kan tolkas så att vektorerna $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ och $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ spänner upp en parallellogram med aren $A=\left\|\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\right\|=|-10|=10$ och paret $\{\vec{a},\ \vec{b}\}$ har en orientering som är motsatt basvektorernas orientering.



OBS:

$det(\vec{a},\vec{b})=0 \Leftrightarrow \vec{a}$ och $\vec{b}$ är parallella.

Detta följer direkt av areatolkningen.

Parallella vektorer kan inte spänna enparallellogram eller hur?

Sats:

En 2x2 matris $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ har en invers A^{-1} om och endast om $det(A)\neq 0$ och i så fall är den $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.