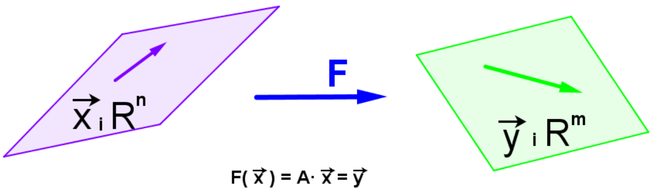
Fö 5 : vad handlar den om?

- Linjära avbildningar och matriser



Definiton 2.9 Låt A vara en $m \times n$ matris. Den avbildning som varje vektor $\vec{x}$ i $\Re^n$ tillordnar vektor $\vec{y}$ i $\Re^m$ genom operationen $\vec{y} = A\vec{x}$ kallas en **linjär avbildning** från $\Re^n$ till $\Re^m$.

A kallas **avbildningsmarisen.**

Exempel 1:

Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ detta ger en linjär avbildning från $\Re^2$ till $\Re^3$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \vec{y}$$

(varför? från $\Re^2$ till $\Re^3$: observera dimensionen av respektive vektor $\vec{x}$ och vektor $\vec{y}$, observera även att en annan dimension för vektor $\vec{x}$ är omöjligt! Varför?)

<u>Exempel på linjära avbidningar</u>

- Identitetsavbildning: $A\vec{x} = \vec{x}$
- Sträckning: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\lambda \in \Re$
- Ortogonal projektion på vektor $\vec{v}$: $A\vec{x} = \dfrac{\vec{x} \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}}\vec{v} = \dfrac{\vec{x} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$
- Spegling
- Vridning

Fö 5 : vad handlar den om?

Identitetsavbildning: $A\vec{x}=\vec{x}$

Exempel 2: Vi vet att $I\cdot\vec{x}=\vec{x}$ (OBS: I (eller E i exempelsamling) är beteckning för en enhetsmatris)

$$I\cdot\vec{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 2+0\cdot(-3)\\ 0\cdot 2+1\cdot(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}=\vec{x}$$ dvs. identitetsavbildningen i detta fall ges av $A=I$

Kan du finna andra A så att $A\vec{x}=\vec{x}$ i exemplet ovan ?

❖ Sträckning: $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, $\lambda\in\Re$

Exempel 3: Vi känner till att $\lambda\cdot I\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$

T.ex.

$$3\cdot I\cdot\vec{x}=3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 2+0\cdot(-3)\\ 0\cdot 2+3\cdot(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -9\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}=3\vec{x}$$

dvs. avbildningen ges i detta fall ges av $A=3\cdot I$

Kan du finna andra A så att $A\vec{x}=3\vec{x}$?

Exempel 4: Vad betyder avbildningsmatrisen $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ geometriskt?

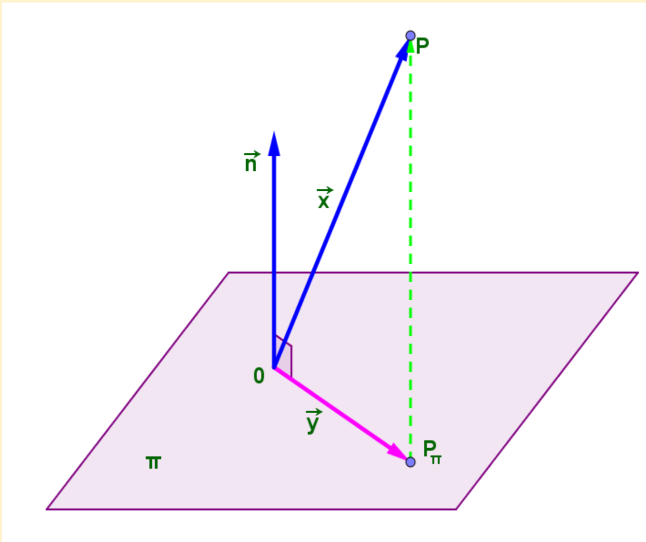
Tips: vad blir bilden av en godtycklig vektor $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$? Rita figur och illustrera.

Fö 5 : vad handlar den om?

Exempel 5: En avbildning definieras genom att varje vektor i rummet projiceras ortogonalt på planet $\pi : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Visa att avbildningen är linjär och bestäm dess matris.

Lösning:

- Rita figur och inför beteckningar av intresse!!! Utgå från bilden:



- Sök $\overrightarrow{0P_\pi}$, som är ortogonal projektion av vektor $\vec{x} = \overrightarrow{0P}$ på π .

- **Obs:** $\overrightarrow{0P_\pi} = A\vec{x} = A \cdot \overrightarrow{0P}$.

- Vi vet normalvektor till planet $\pi : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Vektor $\vec{x} = \overrightarrow{0P}$ kan delas upp i komposanterna $\overrightarrow{P_\pi P}$ och $\overrightarrow{0P_\pi}$, dvs

  $\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0P_\pi} + \overrightarrow{P_\pi P} \Leftrightarrow \overrightarrow{0P_\pi} = \overrightarrow{0P} - \overrightarrow{P_\pi P}$

- alltså $\overrightarrow{0P_\pi} = \overrightarrow{0P} - \overrightarrow{P_\pi P} = A\vec{x} = A \cdot \overrightarrow{0P}$

- $\overrightarrow{P_\pi P}$ är ortogonal projektionen av $\vec{x} = \overrightarrow{0P}$ på normallinjen med

  riktningsvektorn $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Projektionssatsen ger oss $\overrightarrow{P_\pi P} = \dfrac{\overrightarrow{0P} \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}} \vec{n}$

- Då blir $\overrightarrow{0P_\pi} = \overrightarrow{0P} - \overrightarrow{P_\pi P} = \overrightarrow{0P} - \dfrac{\overrightarrow{0P} \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}} \vec{n}$

Fö 5 : vad handlar den om?

- $$\overrightarrow{0P_\pi} = \overrightarrow{0P} - \overrightarrow{P_\pi P} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \frac{1}{6}(x_1-2x_2+x_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}x_1-2x_2+x_3\\-2x_1+4x_2-2x_3\\x_1-2x_2+x_3\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5x_1+2x_2-x_3\\2x_1+2x_2+2x_3\\-x_1+2x_2+5x_3\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\2 & 2 & 2\\-1 & 2 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

Detta ger oss att $\overrightarrow{0P_\pi} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\2 & 2 & 2\\-1 & 2 & 5\end{bmatrix}\cdot\vec{x} \Rightarrow A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\2 & 2 & 2\\-1 & 2 & 5\end{bmatrix}$ är den sökta avbidningsmatrisen.

Svar: $A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\2 & 2 & 2\\-1 & 2 & 5\end{bmatrix}$

Kontroll:om avbildningsmatrisen är korrekt så bör projektionen av planets normalvektor vara en nollvektor, alltså $A\vec{n} = \vec{0}$ och projektionen av vektorer parallella med planet bör ger samma vektor, alltså $A\vec{v} = \vec{v}$ där $\vec{v} /\!/ \pi$.

$$A\cdot\vec{n} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\2 & 2 & 2\\-1 & 2 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5\cdot1+ & 2\cdot(-2)+ & -1\cdot1\\2\cdot1+ & 2\cdot(-2)+ & 2\cdot1\\-1\cdot1+ & 2\cdot(-2)+ & 5\cdot1\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \vec{0}$$

Tag nu $\vec{v} /\!/ \pi$, t.ex. $\vec{v} = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ då blir

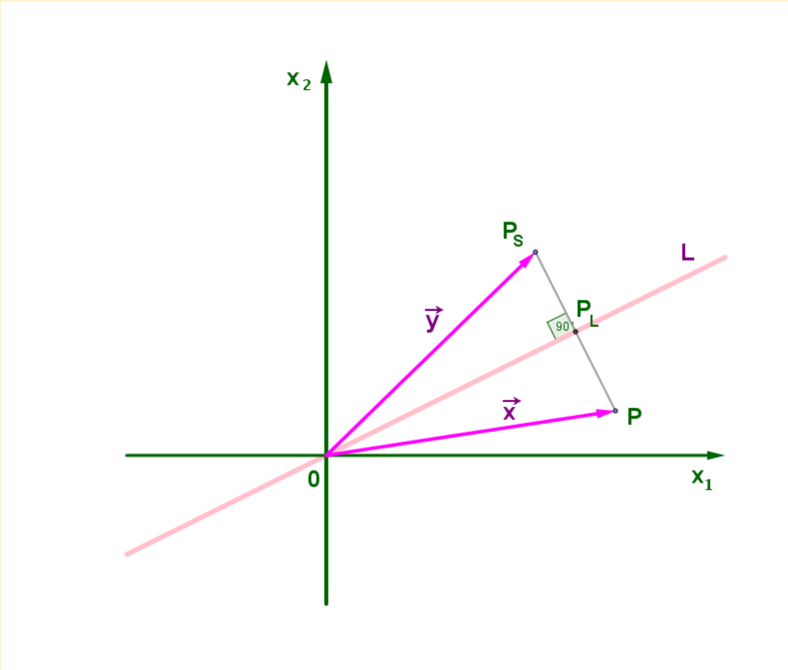
$$A\vec{v} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\2 & 2 & 2\\-1 & 2 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}5\cdot0+ & 2\cdot1+ & -1\cdot2\\2\cdot0+ & 2\cdot1+ & 2\cdot2\\-1\cdot0+ & 2\cdot1+ & 5\cdot2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}0\\6\\12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \vec{v}$$

Fö 5 : vad handlar den om?

Exempel 6: En avbildning definieras genom att varje vektor i planet speglas i linjen L: $x_1 - 2x_2 = 0$. Visa att avbildningen är linjär och bestäm dess matris.

Lösning:

- Rita figur och inför beteckningar av intresse!!! Utgå från bilden:



- Vi vet att normalvektor till linjen L är $\vec{n}_L = (1 \quad -2)^t$
- Projektionssatsen ger $\overrightarrow{P_L P} = \dfrac{\vec{x} \bullet \vec{n}_L}{\vec{n}_L \bullet \vec{n}_L} \vec{n}_L$
- $\overrightarrow{PP_s} = -2\overrightarrow{P_L P} = -2 \cdot \dfrac{\vec{x} \bullet \vec{n}_L}{\vec{n}_L \bullet \vec{n}_L} \vec{n}_L$
- $\vec{x} = \overrightarrow{0P}, \ \overrightarrow{0P_s} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PP_s}$
- Vi söker $\vec{y} = A\vec{x} = \overrightarrow{0P_s} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PP_s} = \vec{x} - 2 \cdot \dfrac{\vec{x} \bullet \vec{n}_L}{\vec{n}_L \bullet \vec{n}_L} \vec{n}_L$
- Alltså $\vec{y} = \vec{x} - 2 \cdot \dfrac{\vec{x} \bullet \vec{n}_L}{\vec{n}_L \bullet \vec{n}_L} \vec{n}_L = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \dfrac{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$

Fö 5 : vad handlar den om?

- **Alltså** $\vec{y} = \vec{x} - 2\cdot\dfrac{\vec{x}\bullet\vec{n}_L}{\vec{n}_L\bullet\vec{n}_L}\vec{n}_L = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - 2\cdot\dfrac{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix}x_1-2x_2\\-2x_1+4x_2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5x_1-2(x_1-2x_2)\\5x_2-2(-2x_1+4x_2)\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3x_1+4x_2\\4x_1-3x_2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

- $\vec{y} = A\vec{x} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{bmatrix}\cdot\vec{x}$
- **Svar:** $A = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{bmatrix}$
- **Kontrollera!**

Sats 2.3 Låt A vara en $m\times n$ matris som avbildar vektor $\vec{x}$ i $\Re^n$ på vektor $\vec{y}$ i $\Re^m$ genom operationen $\vec{y} = A\vec{x}$. Då gäller linearitetsegenskaperna:

- $A(\vec{x}' + \vec{x}'') = A(\vec{x}') + A(\vec{x}'')$
- $F(\lambda\cdot\vec{x}) = \lambda\cdot F(\vec{x})$

Exempel 7: Anta att A är en 2×2 matris. Låt

$\vec{y}_1 = A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ och $\vec{y}_2 = A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

Bestäm bilden av $\vec{x} = \dfrac{1}{2}\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2$

Lösning: Linearitetsegenskaperna ger då

$$A\vec{x} = A\left(\frac{1}{2}\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2\right) = A\left(\frac{1}{2}\vec{x}_1 + (-2\vec{x}_2)\right) = A\left(\frac{1}{2}\vec{x}_1\right) + A(-2\vec{x}_2) =$$

$$= \frac{1}{2}A(\vec{x}_1) + (-2)A(\vec{x}_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$$

Fö 5 : vad handlar den om?

Sats 2.4 (Bassatsen) Låt $\vec{y} = A\vec{x}$ vara en linjär avbildning från $\Re^n$ till $\Re^m$.

Då gäller att: $A = \begin{pmatrix} A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & \dots & A\vec{e}_n \end{pmatrix}$

där $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ är standardbasen.

(alltså respektive kolonn i matrisen ges av bilden av respektive basvektor)

Exempel 8: Bestäm en linjär 3×3 avbildningsmatris där $\vec{e}_1$ avbildas på $\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$, $\vec{e}_2$ avbildas på $\vec{e}_1$ och slutligen $\vec{e}_3$ avbildas på sig själv.

Lösning:

Givet:

- $F(\vec{e}_1) = A\vec{e}_1 = \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
- $F(\vec{e}_2) = A\vec{e}_2 = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $F(\vec{e}_3) = A\vec{e}_3 = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

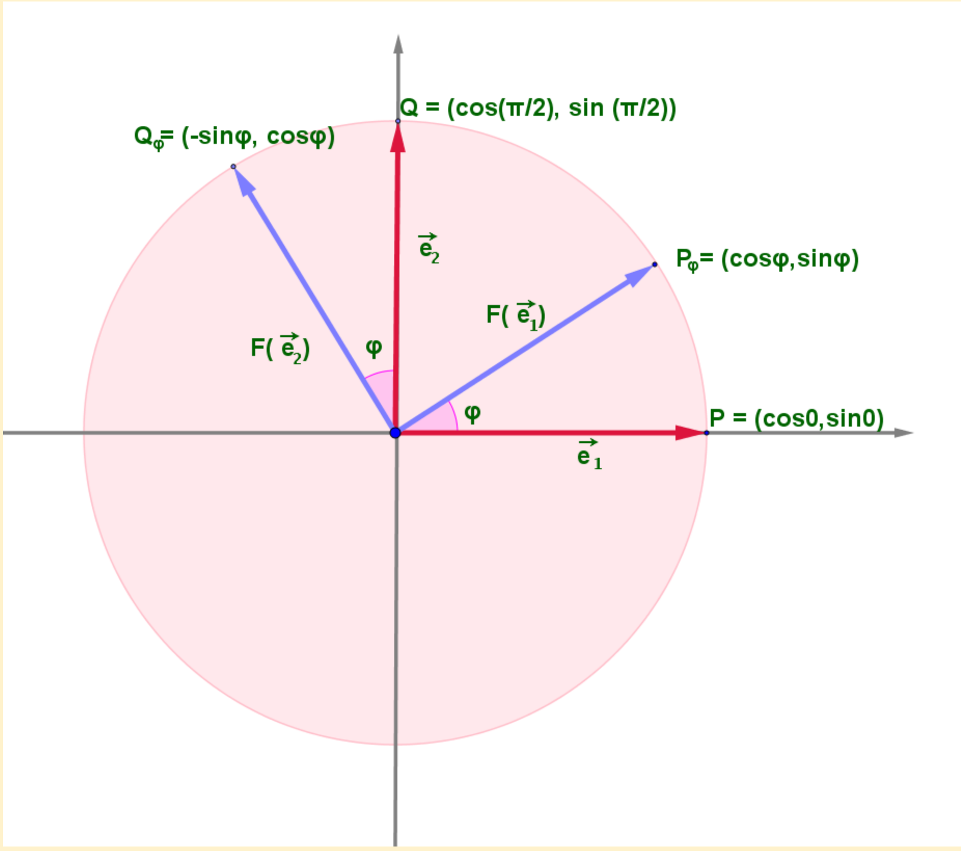
Sats 2.4 ger:

$$A = \begin{pmatrix} A\vec{e}_1 & A\vec{e}_2 & A\vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Fö 5 : vad handlar den om?

Vridning i planet



- $F(\vec{e}_1) = A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

- $F(\vec{e}_2) = A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\varphi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\varphi) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot\cos(\varphi) - 1\cdot\sin(\varphi) \\ 1\cdot\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Sats 2.4 ger:

$$A = (A\vec{e}_1 \quad A\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Avbildningsmatris för en vridning vinkeln φ moturs i ON – bas ges av

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$