Fö 6 : vad handlar den om? 92MA15, 91MA15

- Linjära ekvationssystem
    - Succesiv elimination
- Linjära ekvationssystem och matriser
    - Matrsiform av ekvationssystem
    - Elementära radoperationer
    - Trappstegsmatriser
- Minsta avstånd
- Minsta -kvadratmetoden

Några exempel

Substitutionsmetod. Lös ekvationssystem

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ y = \frac{1}{3}(4 - 2x) \end{cases}$$

Insättning (substitution) av utrycket för y i den första ekvationen ger

$$3x + 2y = 3x + \frac{2}{3}(4 - 2x) = \frac{1}{3}\big(9x + 2(4 - 2x)\big) = \frac{1}{3}(5x + 8) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x + 8 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = -5 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

alltså $\quad y = \frac{1}{3}(4 - 2x) = \frac{4 - 2(-1)}{3} = 2$

- d v s systemets lösning är $x = -1$ och $y = 2$ (entydig lösning!)
- en geometrisk tolkning: två linjer skär varandra i en punkt

Svårigheter: metoden är svårt att använda för 3 eller fler variabler!

Tillåtna operationer

- byta plats på ekvationer
- ändra variablernas namn (t.ex. x_1, x_2 istället för x, y)
- addera ekvationer:

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad a + c = b + c$$

- multiplicera en ekvation med $konstant \neq 0$

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot a = k \cdot b$$

- allmänt:

$$konstant \cdot \text{ekvation} + \text{annan ekvation}$$

Ekvationssystem med 2 variabler

Linjära ekvationer som t.ex. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ bildar ett system.

Varje ekvation beskriver en linje i planet (t.ex. $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$)

Lösningsmängden = samtliga lösningar till ekvationssystemet
= de *gemensamma* punkterna för linjerna.

Tre huvudfall:

- Två identiska linjer (oändligt många lösningar) 
- Två parallella linjer (finns inga lösningar) 
- Två linjer som inte är parallella skär varandra i precis en punkt, (finns en entydig lösning till systemet) 

Fö 6 : vad handlar den om? 92MA15, 91MA15

Succesiv elimination eller Gausselimination

Exempel 1. Lös ekvationssystem

$$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 4x + 8y = 4 \end{cases} :4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + y = -2 \\ x + 2y = \ \ 1 \end{cases} -3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad -5y = -5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

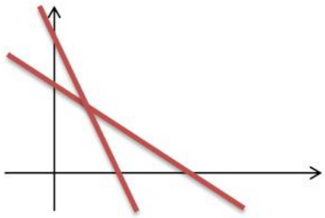
dividerar den 2:a ekv. med 4

multiplicerar den andra ekvationen med -3

och adderar den till den första ekvationen

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \quad\quad y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = \ \ 1 \end{cases}$$

- d v s systemets lösning är $x = -1$ och $y = 1$ (entydig lösning!)
- en geometrisk tolkning: två linjer skär varandra i en punkt



Succesiv elimination eller Gausselimination

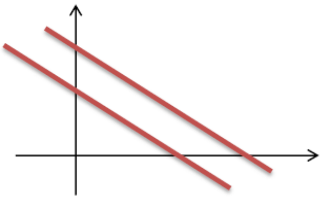
Exempel 2. Lös ekvationssystem

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = 4 \end{cases} :2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \ \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \quad\quad 0 = 1 \end{cases}$$

dividerar den 2:a ekv. med 2

multiplicerar den 1:a ekv. med -1 och adderar den till den 2:a ekv.

- eftersom "$0 = 1$" är ett falskt påstående oavsett värden på x, y så saknar systemet lösningar!
- en geometrisk tolkning: två linjer är parallella!



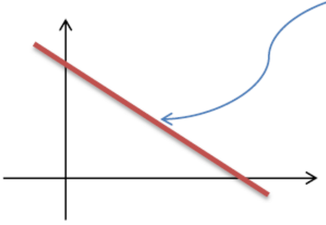
Succesiv elimination eller Gausselimination

Exempel 3. Lös ekvationssystem

$$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=2 \end{cases} :2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x+2y=1 \\ 3x+2y=1 \end{cases} -1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x+2y=1 \\ \quad 0=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=1 \\ \quad \cancel{0=0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y \\ y=?.. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t \\ y=t \end{cases}, \quad \text{där } t \in \mathbb{R}$$

- Talet $t \in \mathbb{R}$ kallas en parameter
- Systemet har oändlig många lösningar.
- En geometrisk tolkning: två linjer sammanfaller!



Ekvationssystem med 3 variabler

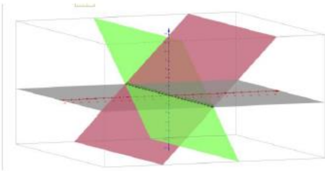
Linjära ekvationer som t.ex. $\begin{cases} 3x+2y-3z=1 \\ 2x+3y+z=4 \\ 2x-y+3z=3 \end{cases}$ bildar ett system.

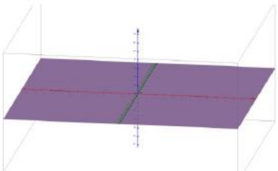
Varje ekvation beskriver ett plan i rummet (t.ex. $2x-y+3z-3=0$)

Tre huvudfall:

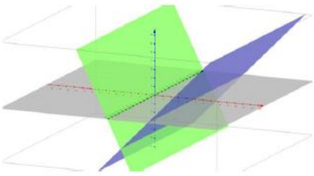
- En gemensam skärningslinje alt. tre sammanfallande plan (oändligt många lösningar)
- Tre skilda parallella skärningslinjer, Två skilda parallella skärningslinjer, Tre skilda parallella plan (saknas lösningar)
- Tre plan som skär varandra i precis en punkt, (finns en entydig lösning till systemet)

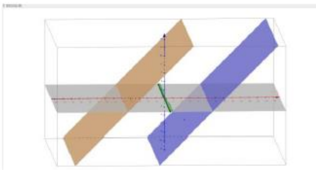
Fall 1

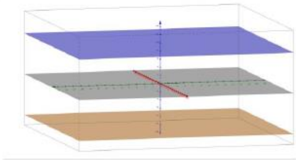




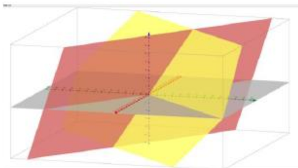
Fall 2







Fall 3



Lösningsstruktur

Allmänt: för ett linjärt ekvationssystem gäller exakt ett av följande alternativ:

- Systemet har entydig lösning
- Systemet har ingen lösning
- Systemet har oändligt många lösningar

En viktig klass: **Homogena system**

- Ett **homogent system** är ett system med nollor i höger led
- Homogena system är alltid lösbara (alla variabler = 0 är alltid en lösning och kallas den triviala lösningen), t.ex.

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Obs att $x = y = 0$ är en trivial lösning

- Homogena system med fler variabler än ekvationer har alltid oändligt många lösningar, t.ex.

$$1 \quad \begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ x - 3y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \begin{cases} z = -5t \\ x = \ \ 3t, \\ y = \ \ t \end{cases} \quad \text{där } t \in \mathbb{R}$$

Lösningsstruktur för homogena ekvationssystem

Allmänt: för ett homogent ekvationssystem gäller exakt ett av följande alternativ:

- Systemet har entydig (trivial) lösning
- Systemet har oändligt många lösningar

Elementära radoperationer

- Multiplicera ekvation med nollskild konstant
- Byta plats på två ekvationer
- Addera konst*(ekvation) till annan ekvation

- Multiplicera rad med nollskild konstant
- Byta plats på två rader
- Addera konst*(rad) till annan rad

$$\begin{matrix}-2 & -3\\ \downarrow & \downarrow\end{matrix}\quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix}1\\ \downarrow\end{matrix}\quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - 4z = -3 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - 4z = -3 \\ -z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 - y - z = 8 \\ y = 3 - 4z = -9 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}-2 & -3\\ \downarrow & \downarrow\end{matrix}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{matrix}1\\ \downarrow\end{matrix}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösningsstruktur

Sats Ett linjärt ekvationssystem har antigen

- *exakt en* lösning
- *ingen* lösning

  eller
- *oändligt många* lösningar

Exempel Lös ekvationssystem

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 4 \\ -2x + 3y - \boldsymbol{z} = 1 \end{cases}$$

Exempel Ange en ekvation som a, b, c, d måste uppfylla för att systemet skall vara lösbart:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 3x + 2y - z = b \\ 2x + 3y + 5z = c \\ 2x + 2y + z = d \end{cases}$$

Trappstegsform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

radekvivalenta

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

trappstegsform

Om matrisen B erhålls efter ändligt många radoperationer på matrisen A så säges A och B vara radekvivalenta.

nya rad = gamla rad + $c \cdot$ annan rad

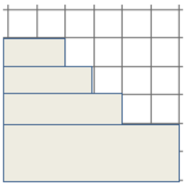
Att A och B är radekvivalenta skrivs

$$A \sim B$$

Sats 3.4.2. *Om två ekvationssystem har* ***radekvivalenta*** *totalmatriser så är systemens lösningsmängder* ***identiska****.*

Definition. Element a_{ij} i matrisen A kallas **pivotelement** om

$$a_{ij} \neq 0 \text{ och } a_{\mu\nu} = 0 \text{ for } \mu \geq i, \nu \leq j \text{ och } (\mu, \nu) \neq (i, j)$$



En matris kallas **trappstegsmatris** om alla nollskilda rader står ovanför alla nollrader och om **varje nollskild rad har ett pivotelement**.

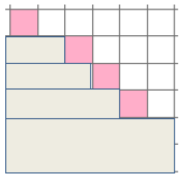
(a) Pivotelementet a_{ij}

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij} & \dots \\ & & & 0 & \dots \\ & \mathbf{0} & & \vdots & \\ & & & 0 & \end{pmatrix}$$

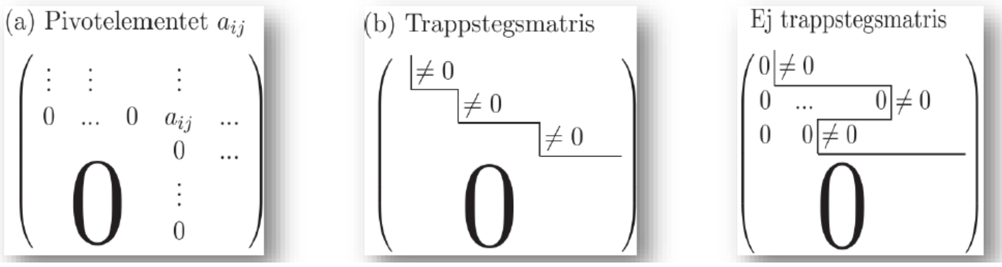
Trappstegsform

Definition 3.5.1. Element a_{ij} i matrisen A kallas **pivotelement** om

$$a_{ij} \neq 0 \text{ och } a_{\mu\nu} = 0 \text{ for } \mu \geq i, \nu \leq j \text{ och } (\mu,\nu) \neq (i,j)$$



En matris kallas **trappstegsmatris** om alla nollskilda rader står ovanför alla nollrader och om **varje nollskild rad har ett pivotelement**.



Sats.

- Varje $r \times k$-matris är **radekvivalent** med minst en trappstegsmatris.
- Om T_1 och T_2 är trappstegsmatriser och $T_1 \sim T_2$ så har T_1 och T_2 **lika många nollskilda rader**.

T ex

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elementära radoperationer

- Multiplicera rad med nollskild konstant
- Byta plats på två rader
- Addera konst*(rad) till annan rad

$-2 \quad 1 \quad -3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$:-14$

$-4 \quad 5$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -14 & -14 & -14 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Sätt $x_4 = t,\ x_3 = s$ *vilket ger*
$x_2 = -t - s,\ x_1 = -2t - s$

Dvs

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Minstakvadratmetoden

Ceres är den första asteroiden som upptäcktes av en slump på nyårsdagen 1801 av Giuseppe Piazzi. Han sökte efter en stjärna vid namn Mayer 87. Men istället för stjärnan fann Piazzi ett stjärnliknande objekt som han först trodde var en komet.

Han fortsatte att studera asteroidens bana, men den 11 februari hindrades han att fortsätta på grund av sjukdom. Han hade då inte hunnit berättat för någon om sin upptäckt och kort därefter skymd solen dess bana.

För att återfinna asteroiden utvecklade Carl Friedrich Gauss **minstakvadratmetoden**, och utifrån Piazzis 24 observationer, som täckte ungefär 9° av Ceres omloppsbana, och antagandet att banan var ett kägelsnitt tog han fram en trolig omloppsbana för Ceres.

Modellproblem. Betrakta nedanstående tabell:

x	1	2	3
y	2	5	6

En matrisformulering är

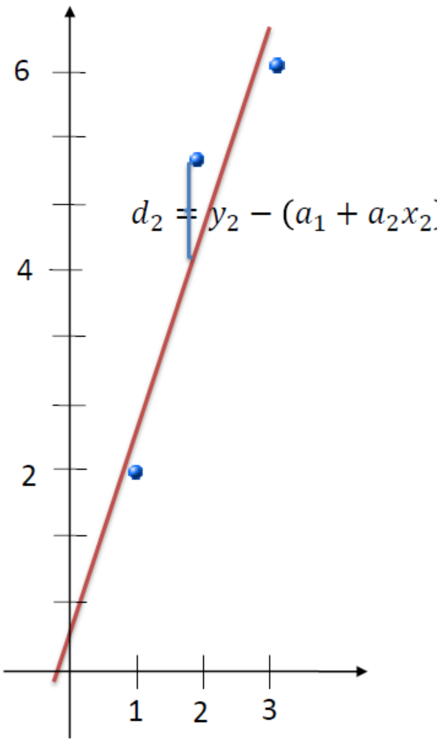
$$\begin{cases} y_1 = a_1 + a_2 x_1 \\ y_2 = a_1 + a_2 x_2 \\ y_3 = a_1 + a_2 x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = a_1 + a_2 1 \\ 5 = a_1 + a_2 2 \\ 6 = a_1 + a_2 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Obs! att systemet är olösbart.

Istället: Bestäm den räta linjen $y = a_1 + a_2 x$ som i minstakvadrat-mening bäst ansluter till data, d v s bestäm a_1 och a_2 så att

$$\sum_{i=1}^{3} \left(y_i - (a_1 + a_2 x_i)\right)^2$$

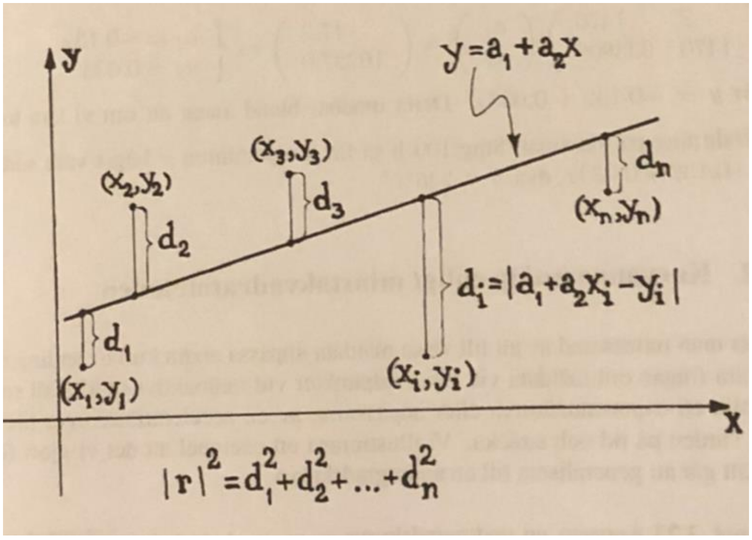
blir så liten som möjligt.



Vi får alltså den linje som har egenskapen att summan av kvadraterna på avstånden d_i i y-led mellan mätpunkterna och motsvarande punkt på linje blir minimal.

Man brukar därför säga att man erhåller den linje som är bäst i **minstakvadratmening.**

I statistiken kallas den linje man får med minstakvadratmetoden för **regressionslinjen.**



Vi kommer att jobba här med ett givet (olösbart) linjärt system $A\vec{x}=\vec{b}$ av m ekvationer och n obekanta för att bestäma en vektor $\vec{x}$ som minimerar $\left|A\vec{x}-\vec{b}\right|$.

- Ett sådant $\vec{x}$ kallas en **minsta-kvadratlösning till systemet**
- $A\vec{x}-\vec{b}=\vec{r}$ kallas **residulavektorn i minsta-kvadratmening**
- $\left|A\vec{x}-\vec{b}\right|$ **minsta-kvadratfelet**

Sats 3.2

Låt A vara en $m\times n$ - matris, $\vec{x}$ en $n\times 1$ - matris och $\vec{b}$ en $m\times 1$ - matris.

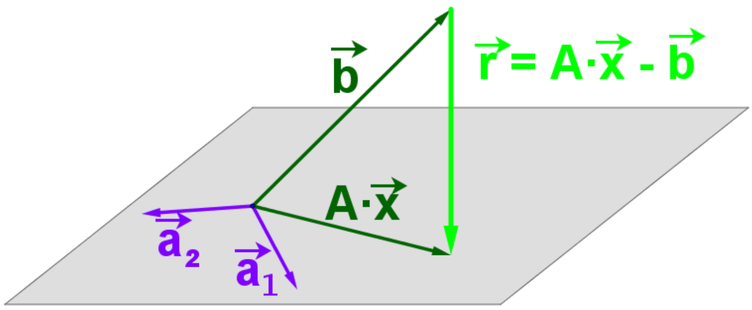
Minsta – kvadratlösningarna till systemet $A\vec{x}=\vec{b}$, dvs. de $\vec{x}$ för vilka residualvektorn $\vec{r}=A\vec{x}-\vec{b}$ blir så kort som möjligt $|\vec{r}|=|A\vec{x}-\vec{b}|$, fås genom att lösa **normalekvationerna**

$$A^t A\vec{x} = A^t\vec{b}$$

Exempel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 6\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$x_1\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}}_{\vec{a}_1}+x_2\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}}_{\vec{a}_2}=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 6\end{bmatrix}$$



Hur tar man normalekvationen fram ?

Vi vet att kortaste avståndet är vinkelrät mot planet, dvs.

- Vektorerna $\vec{a}_1$ och $\vec{a}_2$ spänner upp planet.
- $\vec{a}_1\bullet\vec{r}=0$ och $\vec{a}_2\bullet\vec{r}=0$ eller i matrisform $\vec{a}_1{}^t\vec{r}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$ och

  $\vec{a}_2{}^t\bullet\vec{r}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\Rightarrow A^t\vec{r}=0$
- $A^t\vec{r}=\left[\vec{r}=A\vec{x}-\vec{b}\right]=A^t\left(A\vec{x}-\vec{b}\right)=A^tA\vec{x}-A^t\vec{b}=0\Rightarrow A^tA\vec{x}-A^t\vec{b}=0\Leftrightarrow A^tA\vec{x}=A^t\vec{b}$

- $A^t A\vec{x} = A^t \vec{b}$ kallas **normalekvation**

Vi söker lösningen till $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Någon lösning till detta system finns inte (kontrollera). Systemet är överbestämt. Vi ska lösa ekvationen med hjälp av minstakvadratmetoden.

Vi ska lösa normalekvationen: $A^t A\vec{x} = A^t \vec{b} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Totalmatrisen ger då

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 13 \\ 6 & 14 & 30 \end{array}\right) \sim [rad1 \cdot (-2)] \sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & -12 & -26 \\ 6 & 14 & 30 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ rad2 + rad1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & -12 & -26 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ rad2 \cdot 6 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & -12 & -26 \\ 0 & 12 & 24 \end{array}\right) \begin{bmatrix} rad1 + rad2 \\ \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 0 & -2 \\ 0 & 12 & 24 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} rad1/(-6) \\ rad2/12 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

- Residualen : $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Minsta – kvadratfelet : $|\vec{r}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

- Kontroll: $\vec{r} \perp A\vec{x} \Rightarrow \vec{r} \bullet A\vec{x} = 0$, $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 19 \end{bmatrix}$ och $\vec{r} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger att

  $\vec{r} \bullet A\vec{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 19 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{9}(7 - 26 + 19) = 0$ alltså $\vec{r} \perp A\vec{x}$ och detta medför att

  vara beräkningar är korrekta ☺

Exempel: Vid ett försök har ett antal stäckor uppmätts vid några tidpunkter

t	1	2	3	4	5	6
s	1,1	3,2	6,9	12,8	21,3	31,0

Vi antar att vi kan anpassa mätdata m.h.a. andragradskurva $s = a + bt + ct^2$. Bestäm s som funktion av t , alltså bestäm $s(t)$.

Lösning:

Insättning av rspetkive data i $s = a + bt + ct^2$ ger oss följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 1{,}1 = a + b + c \\ 3{,}2 = a + 2b + 4c \\ 6{,}9 = a + 3b + 9c \\ 12{,}8 = a + 4b + 16c \\ 21{,}3 = a + 5b + 25c \\ 31{,}0 = a + 6b + 36c \end{cases} \Leftrightarrow \left[A \cdot \vec{x} = \vec{b}\right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 3{,}2 \\ 6{,}9 \\ 12{,}8 \\ 21{,}3 \\ 31{,}0 \end{bmatrix}$$

alltså:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 3{,}2 \\ 6{,}9 \\ 12{,}8 \\ 21{,}3 \\ 31{,}0 \end{bmatrix}$$

Normalekvationerna $A^t A\vec{x} = A^t \vec{b}$ ges då av

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 9 & 16 & 25 & 36 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 3{,}2 \\ 6{,}9 \\ 12{,}8 \\ 21{,}3 \\ 31{,}0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73{,}6 \\ 371{,}9 \\ 1929{,}3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}28 \\ -1{,}15857 \\ 1{,}024 \end{bmatrix} \Rightarrow s = 1{,}28 - 1{,}15857 \cdot t + 1{,}024 \cdot t^2$$

svar: $s = 1{,}28 - 1{,}15857 \cdot t + 1{,}024 \cdot t^2$

Exempel: (3.67 i boken) Ett radioaktivt preparat och följande intensiteter uppmätts vid följande tidpunkter:

t	1	2	3	4	5
I	188	147	139	130	100

Bestäm I_0 och λ i sambandet $I = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Lösning:

Börja med att skriva om $I = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ på lijär form (använd logaritmlagarna)

$$I = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Leftrightarrow \left[I > 0, I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} > 0\right] \Leftrightarrow \ln I = \ln\left(I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}\right) \Leftrightarrow \ln I = \ln\left(I_0\right) + \ln\left(e^{-\lambda \cdot t}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln I = \ln\left(I_0\right) - \lambda \cdot t \ln(e) \Leftrightarrow \ln I = \ln\left(I_0\right) - \lambda \cdot t$$

Insättning av respektive data i $\ln I = \ln\left(I_0\right) - \lambda \cdot t$ ger följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} \ln 188 = \ln I_0 - \lambda \cdot 1 \\ \ln 147 = \ln I_0 - \lambda \cdot 2 \\ \ln 139 = \ln I_0 - \lambda \cdot 3 \\ \ln 130 = \ln I_0 - \lambda \cdot 4 \\ \ln 100 = \ln I_0 - \lambda \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[A \cdot \vec{x} = \vec{b}\right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \\ 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ln I_0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 188 \\ \ln 147 \\ \ln 139 \\ \ln 130 \\ \ln 100 \end{bmatrix}$$ alltså:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \\ 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} \ln I_0 \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} \ln 188 \\ \ln 147 \\ \ln 139 \\ \ln 130 \\ \ln 100 \end{bmatrix}$$

Normalekvationerna $A^t A\vec{x} = A^t \vec{b}$ ges då av

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \\ 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ln I_0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ln 188 \\ \ln 147 \\ \ln 139 \\ \ln 130 \\ \ln 100 \end{bmatrix}$$

Fortsätt lösa på egen hand, du kan behöva miniräknare eller dator ☺.

(Testa! Jmf med svaren i boken)

Exempel: Bestäm den andragradskurva som bäst anpassar sig till punkterna $(-1,\ 1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,8)$ i minsta – kvadratmening. (gammal tentamensuppgift)

"Minimalt" lösningsförslag:

Med $y = ax^2 + bx + c$ får vi följande fyra villkor

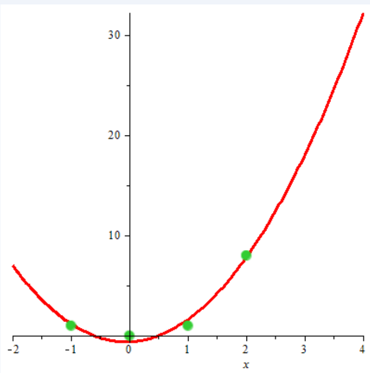
$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 8 \end{cases}$$

I matrisform $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Vi får $A^t A = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ och $A^t b = \begin{bmatrix} 34 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix}$

Normalekvationen $A^t Ax = A^t b$ ger ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Detta ekvationssystem kan lösas med exempelvis Gausselimination. Det ger $a = 2$, $b = \frac{1}{5}$ och $c = \frac{-3}{5}$. Minsta kvadratlösningen är alltså $y = 2x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$.



Svar : Minsta kvadratlösningen är alltså $y = 2x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$.