Fö 8: vad handlar den om?

- Determinanten
  - Grundläggande egenskaper och geometriska tolkningar
- Radoperationens påverkan på determinanten
  - Beräkning av determinanten för en trapstegsmatris
- Utveckling efter rad eller kolonn
  - Kofaktorer
- Multiplikationssaten

Determinant

❖ **Vad krävs** för att ett kvadratiskt linjär ekvationssystem ska ha exakt en lösning?

Vi börjar med 2×2 falet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

den utökade matrisen blir då följande:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} & d_2 \end{array}\right)$$

Det finns en lösnig om

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right) \cdot x_2 = d_2 \Leftrightarrow \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) \cdot x_2 = a_{11}d_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{a_{11}d_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

om $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

Uttryck $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ kallas för koefficientmatrisens **determinant** och

betecknas $\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (obs notationen!)

Fö 8: vad handlar den om?

Beräknas m.h.a. **Höger ned +** **Höger upp –**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

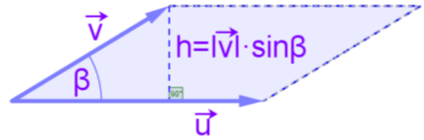
Exempel:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Observation: om en matris A har en nollrad (nollkolonn) så är $\det A = 0$.

Geometriska tolkningar

Vektorprodukten kan skrivas som en determinant:



Area $= |\vec{u}| \cdot h = \left[\dfrac{h}{|\vec{v}|} = \sin\beta \Leftrightarrow h = |\vec{v}| \cdot \sin\beta \right] = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\beta = |\vec{u} \times \vec{v}|$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} \cdot 0 - 0 \cdot a_{22} \\ 0 \cdot a_{12} - a_{11} \cdot 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2} = |a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}| = \left| \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right|$$ **= Area**

Obs:

- **kolonnerna i matrisen består av respektive vektorns koordinater**
- **du minns väl att vektorprodukten är def. i rummet, därför behövdes z-koordinat!**
- **två lika kolonner eller två lika rader medför detA=0, vad kan man säga om vektorerna om två kolonner är lika?**

Fö 8: vad handlar den om?

❖ **Vad krävs** för att ett kvadratiskt linjär ekvationssystem ska ha exakt en lösning?

Vi fortsätter med 3×3 falet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3 \end{cases}$$

Vi gör samma procedur som föregående…:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} & d_2 \end{array}\right)$$

Det finns en lösnig om

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \neq 0$$

detta uttryck $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$

kallas för koefficientmatrisens **determinant** och betecknas

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

och beräknas med hjälp av **SARRUS regel** (endats för 3×3)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Fö 8: vad handlar den om?

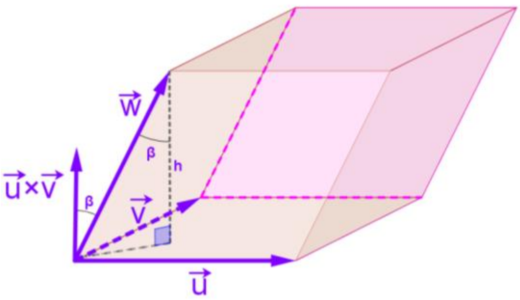
Exempel:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-3\cdot5\cdot7-1\cdot6\cdot8-2\cdot4\cdot9=0$$

$$\begin{matrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\end{matrix}$$

Exempel: (geometriska tolkningar)

Vektorprodukten kan skrivas som determinant:



$$V=|\vec u\times\vec v|\cdot h=\left[\frac{h}{|\vec w|}=\cos\beta \Leftrightarrow h=|\vec w|\cdot\cos\beta\right]=|\vec u\times\vec v|\cdot|\vec w|\cdot\cos\beta=\left|(\vec u\times\vec v)\bullet\vec w\right|=$$

$$=\left|\det(\vec u,\vec v,\vec w)\right|=\left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right\|$$

Obs! Två lika kolonner eller två lika rader medför att det=0

❖ Multiplikation av rad med nollskild konstant

Sats: Låt A vara en $n\times n$ matris och B den $n\times n$ matris som fås då en rad (eller en kolonn) i A multipliceras med ett tal $k\neq 0$. Då är

$$\det B=k\cdot\det A$$

Till exempel:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

Fö 8: vad handlar den om?

Exempel:

$$\det\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 10\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} = 2\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

- Spaltning

> **Sats:** Låt $n\times n$ - matriserna B, A_1, A_2 har egenskap att A_1 och A_2 är lika, sånär som på en rad, och elementen i denna rad i matrisen B är summan av motsvarande element i matriserna A_1 och A_2.
>
> $$\det B = \det A_1 + \det A_2$$

Till exempel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Exempel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+x & 1+2x & 1+3x \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 2x & 3x \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 + x\cdot 0 = 0$$

Obs! Två lika kolonner eller två lika rader medför att det=0

- Elementära räkneoperationer
  - Multiplicera rad (kolonn) med nollskild konstant $\Rightarrow$ hela determinanten multipliceras med konstanten
  - Byta plats på två rader $\Rightarrow$ determinanten byter tecken

Fö 8: vad handlar den om?

- Addera multipel av en rad till en annan rad $\Rightarrow$ determinanten ändras ej

Exempel:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 12 & 15 \end{vmatrix}_{(rad3+rad1\cdot(-2))} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{(rad3+rad1\cdot(-1))} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Addera multipel av en kolonn till en annan kolonn $\Rightarrow$ determinanten ändras ej

Exempel:

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = [\text{rad1 och rad3 byter plats}] = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (rad2+rad\cdot(-3)) \\ (rad3+rad\cdot(-6)) \\ (rad4+rad\cdot(-2)) \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & -20 & 0 \\ 0 & -7 & -44 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & -7 & 22 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}_{(rad3+7\cdot rad2)} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 92 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = [\text{rad4 och rad3 byter plats}] = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 92 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (rad3\cdot 92) \\ (rad4\cdot(-7)) \end{matrix} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{92}\cdot\frac{(-1)}{7}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7\cdot 92 & 0 \\ 0 & 0 & 92\cdot(-7) & 1\cdot(-7) \end{vmatrix}_{(rad4+rad3)} = -2\cdot\frac{1}{92}\cdot\frac{(-1)}{7}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7\cdot 92 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -2\cdot\frac{1}{92}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7\cdot 92 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot 7 = -14$$

Sats: Om A är en övertiangulär matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

så gäller att $\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$.

Fö 8: vad handlar den om?

❖ Kofaktorer

Huvudidè: att krympa en determinant till en summa av determinanter av en storlek mindre.

Definition 4.8.1.:

Låt A vara en $n \times n$ matris och låt $(n-1)\times(n-1)$- matrisen A_{ij} vara den matris som fås då rad i och kolonn j stryks ur A.

Då kallas $M_{ij} = det\, A_{ij}$ **minoren** till elementet a_{ij} och

$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det\, A_{ij}$ kallas **kofaktorn** till elementet a_{ij}.

Exempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

För $i = 1,\ j = 1$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

För $i = 2,\ j = 2$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$$

Sats4.8.3.

Låt A vara en $n \times n$ matris. Då gäller

$det\, A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$ (utveckling **efter** rad i)

$det\, A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$ (utveckling **efter** kolonn j)

Fö 8: vad handlar den om?

Exempel: Beräkna $\det A$. Utveckla efter rad 1.

$$\det A=\det\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=1\cdot(45-48)-2\cdot(36-42)+3\cdot(32-35)=-3+12-9=0$$

Svar: detA=0

- Räknelagar

Låt A vara en kvadratisk matris då gäller följande räknelagar:

- Om två kolonner/rader i A är lika så är $\det A=0$
- Om en kolonn/rad består av bara nollor så är $\det A=0$
- Om A är en triangulär matris så är $\det A=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$
- Om alla element i en kolonn/rad multipliceras med $\lambda\in\Re$ så multipliceras också $\det A$ med λ
- Om en multipel av en kolonn/rad adderas till en kolonn/rad så ändras ej $\det A$
- Om två kolonner/rader byter plats så ändrar $\det A$ tecken
- $\det A$ är en linjär funktion av varje kolonn/rad
- $\det A=\det\left(A^t\right)$

Fö 8: vad handlar den om?

Exempel:

Lös $\det A = 0$ där $A = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$.

Lösnining:

Först beräknar vi VL av ekvationen.

$$VL = \det A = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = [k1+k1+k3] =$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 5-\lambda & 3-\lambda & 1 \\ 5-\lambda & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = [r3-r2] = (5-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= [utveckla\ \ efter\ \ r3] = (5-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(3-\lambda-2) =$$

$$= (5-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(1-\lambda) = (5-\lambda)\cdot(1-\lambda)^2$$

Alltså $\det A = 0 \Rightarrow (5-\lambda)\cdot(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda) = 0$ eller $(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$ eller $\lambda = 1$

Svar: $\lambda = 5$ eller $\lambda = 1$

- Multiplikationssatsen

  $|\det(AB)| = |\det A| \cdot |\det B|$

  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Fö 8: vad handlar den om?

Exempel:

Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

- Bestäm $3 \cdot \det A$ och $\det(3A)$

  Lösning:

  $$3 \cdot \det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (4+2) = 18$$

  $$\det(3A) = \det\left(3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = 3^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 9 \cdot 6 = 54$$

  Svar: $3 \cdot \det A = 18$, $\det(3A) = 54$

- Bestäm $\det(AB)$

  Lösning:

  $$\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = (4+2) \cdot (-1-2) = 6 \cdot (-3) = -18$$

  Svar: $\det(AB) = -18$