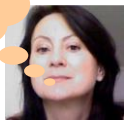


Hej!



## Fö 8: vad handlar den om?

- Determinantkriteriet för ekvationssystem
- Icke kvadratiska ekvationssystem

### Determinantkriteriet

#### Sats 5.1

- ❖  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$  Ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{b}$  har **entydig** lösning.
- ❖  $\det A = 0 \Leftrightarrow$  Ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{b}$  **saknar** lösning eller har **oändligt antal** lösningar.

**Exempel:** Undersök anantalet lösningar till ekvationssystemet (nedan) för olika värden på  $a$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + ay + 2z = 0 \\ x + 3y + 2az = 1 \end{cases}$$

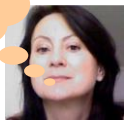
**Lösning:** Bestäm determinanten:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2a \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} k2 - k1 \\ k3 - k1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & 0 \\ 1 & 2 & 2a-1 \end{vmatrix} = [\text{utveckla efter kolonn 3}] = \\ &= (2a-1) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a-2 \end{vmatrix} = (2a-1) \cdot (a-2) \end{aligned}$$

$$\text{Alltså } \det A = 0 \Rightarrow (2a-1) \cdot (a-2) = 0 \Leftrightarrow (2a-1) = 0 \text{ eller } (a-2) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ eller } a = 2$$

- För alla  $a \neq \frac{1}{2}$  och  $a \neq 2$  är  $\det A \neq 0$  och systemet har **entydig lösning**.

Hej!



### Fö 8: vad handlar den om?

- Om  $a = 2$  får vi

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

Med den utökade matrisen

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(rad2/2)} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(rad1-rad2)} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \text{ger } 0 = 1, \text{ motsägelse}$$

För  $a = 2$  har systemet **ingen** lösning.

- Om  $a = \frac{1}{2}$  får vi

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + \frac{1}{2}y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

Med den utökade matrisen

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2 \cdot rad2)} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(rad2-4 \cdot rad1) \\ (rad3-rad1)}}} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \text{ger } y = \frac{4}{3} \\ \text{ger } y = 0 \end{array} \right\} \text{motsägelse}$$

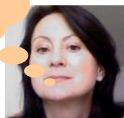
För  $a = \frac{1}{2}$  har systemet **ingen** lösning.

**Svar:** För alla  $a \neq \frac{1}{2}$  och  $a \neq 2$  är  $\det A \neq 0$  och systemet har **entydig lösning**.

För  $a = 2$  har systemet **ingen** lösning.

För  $a = \frac{1}{2}$  har systemet **ingen** lösning.

Hej!



Fö 8: vad handlar den om?

### Sats 5.2

- ❖  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$  Ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{0}$  har **entydig** lösning (triviala lösningar)
- ❖  $\det A = 0 \Leftrightarrow$  Ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{0}$  **oändligt många** lösningar.

**Exempel:** Undersök om det finns någon vektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$  så att vektorerna  $A\vec{x}$  och  $\vec{x}$  är

parallella, där  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Lösning:**  $A\vec{x}$  och  $\vec{x}$  är parallella om  $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot I)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \cdot (1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \\ &= \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4} = \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\lambda - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 2) \Rightarrow \det(A - \lambda \cdot I) = 0 \text{ då } (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ eller } \lambda = 2 \end{aligned}$$

**För**  $\lambda = 3$  får vi följande ekvationssystem

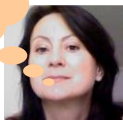
$$(A - 3 \cdot I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-3 & -1 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

den utökade matrisen ger då

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right)_{(r_2-2 \cdot r_1)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 \cdot 1 & -2 - 2 \cdot (-1) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{ekv, ger ingen information}$$

För  $x_1 = x_2$  gäller: tag t.ex.  $x_1 = t \Rightarrow x_2 = t$ ,  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  där  $t \in \mathbb{R}$ .

Hej!



## Fö 8: vad handlar den om?

**För**  $\lambda = 2$  får vi följande ekvationssystem

$$(A - 2 \cdot I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-2 & -1 \\ 2 & 1-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

den utökade matrisen ger då

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right)_{(r2-r1)} \sim \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 2x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = x_2$$

**ekv, ger ingen information**

För  $2x_1 = x_2$  gäller: tag t.ex.  $x_2 = t \Rightarrow x_1 = 2t$ ,  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  där  $t \in \mathfrak{R}$ .

**Svar:**  $A\vec{x}$  och  $\vec{x}$  är parallella för  $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  och  $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  där  $t \in \mathfrak{R}$ .

## Summa summarum

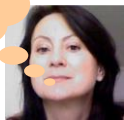
### Sats 5.1

- ❖  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$  Ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{b}$  har **entydig** lösning.
- ❖  $\det A = 0 \Leftrightarrow$  Ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{b}$  **saknar** lösning eller har **oändligt antal** lösningar.

### Sats 5.2

- ❖  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$  Ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{0}$  har **entydig** lösning (triviala lösningar)
- ❖  $\det A = 0 \Leftrightarrow$  Ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{0}$  **oändligt många** lösningar.

Hej!



Fö 8: vad handlar den om?

**Exempel:** Visa att ekvationen för linjen genom  $(x_1, y_1)$  och  $(x_2, y_2)$  kan skrivas som

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**Lösning:**

Vi vet att en linje på allmän form kan skrivas som  $ax + by + c = 0$ .

Punkternas koordinater måste uppfylla ekvationen  $ax + by + c = 0$ .

Detta medför att följande gäller:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta är ett ekvationssystem med tre ekvationer och tre obekanta  $(a, b, c)$

och enligt **sats 5.2** gäller att  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ .

### Sats 5.2

Låt  $A\vec{x} = \vec{b}$  beteckna ett linjärt ekvationssystem med färre ekvationer än obekanta

- ❖ Om  $\vec{b} = \vec{0}$  har ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{b}$  **oändligt många** lösningar.
- ❖ Om  $\vec{b} \neq \vec{0}$  har ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{b}$  **oändligt många** eller **inga** lösningar.

### Icke-kvadratiske ekvationssystem

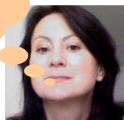
**Bevis:**

Komplettera ekvationssystemet med nollrader så att vi får ett kvadratisk ekvationssystem, detta medför att  $\det A = 0$ .

**Sats 5.2** ger då att ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{0}$  har **oändligt många** lösningar.

**Sats 5.1** ger då att ekvationssystemet  $A\vec{x} = \vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) **saknar** lösning eller har **oändligt många** lösningar.

Hej!



## Fö 8: vad handlar den om?

**Exempel:** Bestäm antalet lösningar till 
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

**Lösning:** En lösning är

$x = y = z = 1$ . Alltså enligt sats 5.3 finns det **oändligt antal** lösningar.

**Svar:** Oändligt antal lösningar.

**Exempel:** Bestäm lösningar till 
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Den utökade matrisen ger följande:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)_{(r2-3r1)} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right)_{(r1+r2)} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -y - 2z = -3 \end{cases}$$

Och vidare 
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -y - 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ -y = -3 + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 3 - 2z \end{cases}$$

Tag t.ex.  $z = t, t \in \mathfrak{R} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Svar:** 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathfrak{R}$$

**Obs:** Du kan alltid kontrollera dina svar. Insättning av  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathfrak{R}$  i respektive ekvation

ger:

$$\begin{cases} 3t + 2 \cdot (3 - 2t) + t = 6 \\ t + (3 - 2t) + t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t + 6 - 4t + t = 6 \\ t + 3 - 2t + t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 6 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

insättningen ger sanna ekvationer som medför att lösningen är korrekt.

