Fö 8: vad handlar den om?

- Determinantkriteriet för ekvationssystem
- Icke kvadratiska ekvationssystem

Determinantkriteriet

Sats 5.1

- $\det A \neq 0 \iff$ Ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har **entydig** lösning.
- $\det A = 0 \iff$ Ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ **saknar** lösning eller har **oändligt antal** lösningar.

Exempel: Undersök anatalet lösningar till ekvationssystemet (nedan) för olika värden på a.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + ay + 2z = 0 \\ x + 3y + 2az = 1 \end{cases}$$

Lösning: Bestäm determinanten:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2a \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} k2 - k1 \\ k3 - k1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & 0 \\ 1 & 2 & 2a-1 \end{vmatrix} = [\text{utveckla efter kolonn } 3] =$$

$$= (2a-1)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a-2 \end{vmatrix} = (2a-1)\cdot(a-2)$$

Alltså $\det A = 0 \Rightarrow (2a-1)\cdot(a-2) = 0 \iff (2a-1) = 0$ eller $(a-2) = 0 \iff a = \frac{1}{2}$ eller $a = 2$

- För alla $a \neq \frac{1}{2}$ och $a \neq 2$ är $\det A \neq 0$ och systemet har entydig lösning.

Fö 8: vad handlar den om?

- Om $a=2$ får vi

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=0 \\ x+3y+4z=1 \end{cases}$$

Med den utökade matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)(rad2/2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)(rad1-rad2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \text{ger } 0=1, \text{ motsägelse}$$

För $a=2$ har systemet **ingen** lösning.

- Om $a=\frac{1}{2}$ får vi

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+\frac{1}{2}y+2z=0 \\ x+3y+z=1 \end{cases}$$

Med den utökade matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)(2 \cdot rad2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} (rad2-4 \cdot rad1) \\ (rad3-rad1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)\left.\begin{matrix} \text{ger } y=\frac{4}{3} \\ \text{ger } y=0 \end{matrix}\right\} \text{motsägelse}$$

För $a=\frac{1}{2}$ har systemet **ingen** lösning.

Svar: För alla $a \neq \frac{1}{2}$ och $a \neq 2$ är $\det A \neq 0$ och systemet har **entydig lösning.**

För $a=2$ har systemet **ingen** lösning.

För $a=\frac{1}{2}$ har systemet **ingen** lösning.

Fö 8: vad handlar den om?

Sats 5.2

- $\det A \neq 0 \iff$ Ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har **entydig** lösning (triviala lösingar)
- $\det A = 0 \iff$ Ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ **oändligt många** lösningar.

Exempel: Undersök om det finns någon vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ så att vektorerna $A\vec{x}$ och $\vec{x}$ är parallella, där $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösning: $A\vec{x}$ och $\vec{x}$ är parallella om $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \iff (A - \lambda \cdot I)\vec{x} = \vec{0}$

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 =$$

$$= \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4} = \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\lambda - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 2) \Rightarrow \det(A - \lambda \cdot I) = 0 \text{ då } (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 \iff \lambda = 3 \text{ eller } \lambda = 2$$

För $\lambda = 3$ får vi följande ekvationssystem

$$(A - 3 \cdot I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-3 & -1 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

den utökade matrisen ger då

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right)_{(\text{r2-2}\cdot\text{r1})} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 - 2\cdot 1 & -2 - 2\cdot(-1) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2 \\ \Rightarrow \text{ekv, ger ingen information} \end{array}$$

För $x_1 = x_2$ gäller: tag t.ex. $x_1 = t \Rightarrow x_2 = t$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $t \in \Re$.

Fö 8: vad handlar den om?

För $\lambda = 2$ får vi följande ekvationssystem

$$(A - 2 \cdot I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-2 & -1 \\ 2 & 1-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

den utökade matrisen ger då

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right)_{\text{(r2-r1)}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = x_2 \\ \Rightarrow \text{ekv, ger ingen information} \end{array}$$

För $2x_1 = x_2$ gäller: tag t.ex. $x_2 = t \Rightarrow x_1 = 2t$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ där $t \in \Re$.

Svar: $A\vec{x}$ och $\vec{x}$ är parallella för $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ där $t \in \Re$.

Summa summarum

Sats 5.1

- $\det A \neq 0 \;\Leftrightarrow$ Ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har **entydig** lösning.
- $\det A = 0 \;\Leftrightarrow$ Ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ **saknar** lösning eller har **oändligt antal** lösningar.

Sats 5.2

- $\det A \neq 0 \;\Leftrightarrow$ Ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har **entydig** lösning (triviala lösingar)
- $\det A = 0 \;\Leftrightarrow$ Ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ **oändligt många** lösningar.

Fö 8: vad handlar den om?

Exempel: Visa att ekvationen för linjen genom (x_1, y_1) och (x_2, y_2) kan skrivas som

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Lösning:

Vi vet att en linje på allmän form kan skrivas som $ax + by + c = 0$.

Punkternas koordinater måste uppfylla ekvationen $ax + by + c = 0$.

Detta medför att följande gäller:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta är ett ekvationssystem med tre ekvationer och tre obekanta (a, b, c)

och enligt **sats 5.2** gäller att $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Sats 5.2

Låt $A\vec{x} = \vec{b}$ beteckna ett linjärt ekvationssystem med färre ekvationer än obekanta

- Om $\vec{b} = 0$ har ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ **oändligt många** lösningar.
- Om $\vec{b} \neq 0$ har ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ **oändligt många** eller **inga** lösningar.

Icke-kvadratiska ekvationssystem

Bevis:

Komplettera ekvationssystemet med nollrader så att vi får ett kvadratiskt ekvationssystem, detta medför att $\det A = 0$.

Sats 5.2 ger då att ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har **oändligt många** lösningar.

Sats 5.1 ger då att ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ $(\vec{b} \neq 0)$ **saknar** lösning eller har **oändligt många** lösningar.

Fö 8: vad handlar den om?

Exempel: Bestäm antalet lösningar till $\begin{cases} 3x+2y+z=6 \\ x+y+z=3 \end{cases}$.

Lösning: En lösning är

$x=y=z=1$. Alltså enligt sats 5.3 finns det **oändligt antal** lösningar.

Svar: Oändligt antal lösningar.

Exempel: Bestäm lösningar till $\begin{cases} 3x+2y+z=6 \\ x+y+z=3 \end{cases}$.

Den utökade matrisen ger följande:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)_{(r2-3\cdot r1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)^{(r1+r2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x-z=0 \\ \Rightarrow -y-2z=-3 \end{array}$$

Och vidare $\begin{cases} x-z=0 \\ -y-2z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ -y=-3+2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=3-2z \end{cases}$

Tag t.ex. $z=t, t\in\Re \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=3-2t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Svar: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t\in\Re$

Obs: Du kan alltid kontrollera dina svar. Insättning av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t\in\Re$ i respektive ekvation

ger:

$$\begin{cases} 3t+2\cdot(3-2t)+t=6 \\ t+(3-2t)+t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t+6-4t+t=6 \\ t+3-2t+t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6=6 \\ 3=3 \end{cases},$$

insättningen ger sanna ekvationer som medför att lösningen är korrekt.