Fö 9: vad handlar den om?

- Linjärkombination (repetition)
- Bas
- Linjärt oberoende och beroende

Linjärkombination

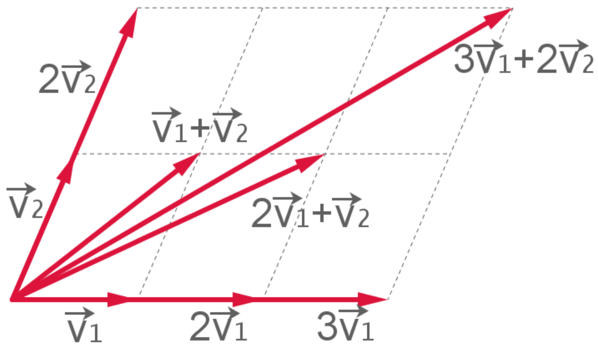
Definition 5.1

Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vara vektorer i $\Re^n$. Låt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Re$.

Då kalllas uttrycket

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n$$

en **linjärkombination** av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.



Exempel: Kan vektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ skrivas som en linjärkombination av $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Lösning: Vi söker λ_1 och λ_2 så att: $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{w}$, alltså $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

och i matrisform $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Fö 9: vad handlar den om?

Den utökade matrisen ger oss då följande:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{array}\right)_{(r3+4\cdot r1)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 18 \end{array}\right)_{(r3-6\cdot r2)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^{(r1-r2)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \lambda_1 = -2 \\ \Rightarrow \lambda_2 = 3 \\ \end{array}$$

Systemet är lösbart för $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 3$ dvs

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ alltså $\vec{v} = -2\vec{u} + 5\vec{w}$.

Detta betyder att $\vec{v}$ ligger i samma plan som $\vec{u}$ och $\vec{w}$. Observera att respektive $\vec{u}$ och $\vec{w}$ kan också skrivas som linjärakombinationer av de två övriga som:

$\vec{u} = \frac{5}{2}\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v}$ och $\vec{w} = \frac{1}{5}\vec{v} + \frac{2}{5}\vec{u}$.

Bas

Betrakta systemet $\Re^2$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} \Leftrightarrow x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Vi vet enligt **Sats 5.1** att om $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ Ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har en **entydig** lösning.

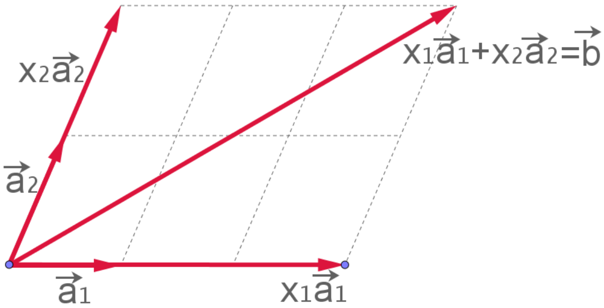
Vilket är precis då $\vec{a}_1$ och $\vec{a}_2$ **ej** är parallella. $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ kallas då en **bas för** $\Re^2$

och $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}}$ kallas då koordinaterna för vektor $\vec{b}$ i basen $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.

Observera notationen : $\vec{b} = \underline{x_1} \cdot \vec{a}_1 + \underline{x_2} \cdot \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}}$

Man säger att vektor $\vec{b}$ är **en injärkombination** av basvektorerna i basen $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.

Fö 9: vad handlar den om?



$$\vec{b} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}}$$

<u>Bas</u>

Betrakta systemet $\Re^3$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} \Leftrightarrow x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}}_{\vec{a}_3} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Vi vet enligt **Sats 5.1** att om $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ Ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har en **entydig** lösning.

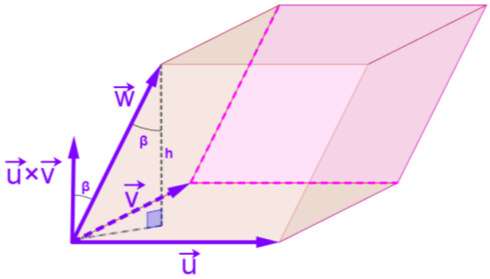
Vilket är precis då $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ och $\vec{a}_3$ **ej ligger i något gemensamt plan**.

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ kallas då en **bas för** $\Re^3$ och $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}}$ kallas då koordinaterna för vektor $\vec{b}$ i basen $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$.

Observera notationen : $\vec{b} = \underline{x_1} \cdot \vec{a}_1 + \underline{x_2} \cdot \vec{a}_2 + \underline{x_3} \cdot \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}}$.

Man säger att vektor $\vec{b}$ är **en linjärkombination** av basvektorerna i basen $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$.

Fö 9: vad handlar den om?



Kommentar till bilden : vektorerna $\vec{u},\vec{v}$ och $\vec{w}$ ligger ej i samma plan. $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ är också en bas för $\Re^3$. Vektorerna $\vec{u},\vec{v}$ och $\vec{w}$ spänner upp en parallellpiped. Man kan även säga att vektorerna spänner upp ett rum, varje vektor i detta rum kan skrivas som **linjärkombination av** basvektorerna i basen

Exempel: Utgör vektoretna $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ och $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ en bas för $\Re^3$?

Lösning: $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0$, ty två rader är lika.

Svar: Nej, vektorerna utgör ej en bas för $\Re^3$. Vi ser t.o.m. att $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$.

Vektorena är linjärt beroende.

Fö 9: vad handlar den om?

Linjärt beroende och oberoende

Definition 5.4 och 5.5

Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vara uppsättning av vektorer i $\Re^n$.

Ekvationen $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$

där de obekanta minst $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Re$ söks,kallas **beroendeekvationen.**

- Om **beroendeekvationen** har fler lösningar än $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ säger vi att $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ är **linjärt beroende.**
- Om $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ är den enda lösningen till **beroendeekvationen** säger vi att $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ är **linjärt oberoende.**

OBS! Vektorer är linjärt beroende **omm** någon av vektorerna kan skrivas som en linjärkombination av de övriga t.ex. låt $\lambda_1 \neq 0$ så är

$$\vec{v}_1 = \frac{-1}{\lambda_1}\left(\lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n\right)$$

Speciellt

två vektorer i planet $\vec{u}, \vec{v}$ är linjärt beroende då $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, ty om $\vec{u} \,//\, \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = k \cdot \vec{v}$

tre vektorer i planet $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ är linjärt beroende om de ligger i ett gemensamt plan (tänk på att då spänner de **inte** upp en parallellepiped)

Fö 9: vad handlar den om?

Exempel: Är vektoretna $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ linjärt beroened eller oberoende?

Lösning: $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$ ger oss följande:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den utökade matrisen ger oss då:

Alltså $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 \\ \lambda_3 = \lambda_2 \end{cases}$ tag t.ex. $\lambda_2 = t, t \in \Re$ då blir $\lambda_1 = -3t, \lambda_2 = t, \lambda_3 = t$.

Systemet har alltså icke triviala lösningar. Vektorerna är **linjärt beroende.**

Alternativ lösning: $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \ldots = 0$, dvs **linjärt beroende.**

(när fungerar det att använda determinanter?)

Svar: Vektorena är linjärt beroende.

Definition: En **bas** för $\Re^n$ är en uppsättning av vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ sådana att

- $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ är **linjärt oberoende**
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ **spänner upp** $\Re^n$, dvs varje varje vektor i $\Re^n$ kan skrivas som en linjärkombinati av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$

Fö 9: vad handlar den om?

Sats 5.6

Varje uppsättning av n stycken linjärt oberoende vektorer i $\Re^n$ utgör en bas för $\Re^n$. Då kan varje vektor i $\Re^n$ på precis ett sätt skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ dvs

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n, \quad \text{där} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

är koordinaterna för vektorn $\vec{v}$ i basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$.

Exempel: Visa att $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ligger i planet som spänns upp av $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ange också koordinaterna för $\vec{u}$ i basen $\{\vec{v}, \vec{w}\}$.

Lösning: Om vektor $\vec{u}$ ligger i planet som spänns upp av $\vec{v}$ och $\vec{w}$ innebär det att $\vec{u}$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{w}$ på följande sätt: $\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} = \vec{u}$.

Efter insättningen av respektive koordinater får vi

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$ vilket ger (övning för dig) $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 2$ dvs

$$\vec{u} = -1 \cdot \vec{v} + 2 \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\vec{v}, \vec{w}\}}.$$

Vektor $\vec{u}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{v}$ och $\vec{w}$ (vi hittade lösningen till ekvationen) och detta visar att $\vec{u}$ ligger i planet som spänns upp av $\vec{v}$ och $\vec{w}$.

Svar: Koordinaterna för $\vec{u}$ i basen $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ är $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Fö 9: vad handlar den om?

Exempel: Är vektorerna $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\\1\end{pmatrix}$ och $\vec{w}=\begin{pmatrix}5\\4\\1\\5\end{pmatrix}$ linjärt oberoende eller beroende?

Lösning: $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\ldots+\lambda_n\vec{v}_n=\vec{0}$

$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}3\\4\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}5\\4\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, den utökade matrisen ger oss då

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&5&0\\0&4&4&0\\1&-1&1&0\\2&1&5&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ r2/4\\ (r3-r1)\\ (r4-2\cdot r1)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&5&0\\0&1&1&0\\0&-4&-4&0\\0&-5&-5&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ (r3+4\cdot r2)\\ (r4+5\cdot r2)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&5&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{c}(r1-5\cdot r2)\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\Rightarrow\lambda_1-2\lambda_2=0\\ \Rightarrow\lambda_2+\lambda_3=0\\ \\ \\ \end{array}$$

Alltså $\begin{cases}\lambda_1-2\lambda_2=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=2\lambda_2\\ \lambda_3=-\lambda_2\end{cases}$, $\lambda_2=t, t\in\Re$ ger att $\begin{cases}\lambda_1=2t\\ \lambda_2=t\\ \lambda_3=-t\end{cases}$

dvs **systemet har icke triviala lösningar.** Vektorerna är **linjärt beroende.**

t.ex. ger $t=1$, $\begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_2=1\\ \lambda_3=-1\end{cases}$. Insättningen i $\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}+\lambda_3\vec{w}=\vec{0}$ ger

$2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$ eller $\vec{v}=\vec{w}-2\vec{u}$ eller $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{w}-\frac{1}{2}\vec{v}$.

Svar: Vektorerna är **linjärt beroende.**