vad handlar den om?

- Matrisinvers och Inversa avbildningar

Matrisinvers

Definition

En kvadrtisk matris A kallas **inverterbar** om det finns en matris B så att

$$AB = BA = I$$

B kallas A:s **invers** och betecknas A^{-1}.

OBS! A, A^{-1} och B har samma format.

Räknelagar:

- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (Obs! ordningen)
- $\left(A^{n}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}$ för alla heltal $n \geq 1$

vad handlar den om?

Exempel: Om $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ så avbildas vektorn $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$ på

$$\vec{y}=A\vec{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}$$

Antag nu att vi istället känner till $\vec{y}=\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}$ och söker $\vec{x}$,

$$\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}=A\vec{x} \quad \text{dvs} \quad \begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Lös ekvationen $\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$.

Den utökade martrisen ger då:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 4\end{array}\right)_{(r2-r1)} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 0 & -1 & -1\end{array}\right)^{(r1+2\cdot r2)} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{array}\right)\begin{array}{l}\Rightarrow x_1=3\\ \Rightarrow x_2=1\end{array}$$

alltså $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$ är den enda vektorn som avbildas på $\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}$.

Frågan är om vi kan hitta en matris A^{-1} så att

Allmänt, givet $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ och $\vec{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$, vilka $\vec{x}$ ger $\vec{y}=A\vec{x}$?

vad handlar den om?

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

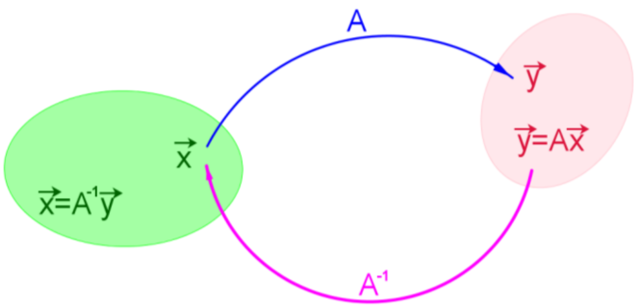
Den utökade martrisen ger då:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y_1 \\ 1 & 1 & y_2 \end{array}\right)_{(r2-r1)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y_1 \\ 0 & -1 & y_2 - y_1 \end{array}\right)^{(r1+2\cdot r2)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 + 2(y_2 - y_1) \\ 0 & -1 & y_2 - y_1 \end{array}\right)_{(-1\cdot r2)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -y_1 + 2y_2 \\ 0 & 1 & y_1 - y_2 \end{array}\right)$$

alltså $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 + 2y_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

Dvs , till varje $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ finns **exakt** ett $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ så att $\vec{y} = A\vec{x}$.

Matrisen $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ kallas **inversen** till A och betecknas A^{-1}.



Obs! Om A har invers A^{-1} så är $\vec{y} = A\vec{x} = \left[\vec{x} = A^{-1}\vec{y}\right] = AA^{-1}\vec{y}$ dvs $AA^{-1} = I$

Obs! A har **invers omm** $\det A \neq 0$

Metod: $AA^{-1} = I$

$$(A|I) \sim \ldots \sim (I|A^{-1})$$

Exempel: Beräkna inversen till $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

vad handlar den om?

Lösning:

Tips! Gör dina beräkningar "synliga", räkna ej med bråk!

Observera att rad 1 återför sitt utseende, efter då rad 2 förändrades

$$(A|I) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (3 \cdot r1) \\ (2 \cdot r2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 9 & 3 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 2 \end{array}\right)_{(r2-r1)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)^{(r1-3 \cdot r2)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)^{(r1-3 \cdot r2)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)^{(r1/2)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim (I|A^{-1}) \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Tips! Ha en **vana** att kontrollera dina beräkningar! $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

Sats 6.2 Antag att A och C är $n \times n$ matriser och låt I vara enhetsmatrisen av typ $n \times n$.

- Om A är inverterbar med inversen A^{-1} så är $A^{-1}A = AA^{-1} = I$
- Om $AC = I$ eller $CA = I$ så är A inverterbar och $C = A^{-1}$

vad handlar den om?

Exempel: A och B är inverterbara. Bestäm X så att $AXB = AB + A^2$.

Lösning: (OBS! varje räknelag skall alltid redovisas noggrant vid den typen av uppgifter)

OBS!

respektive led multipliceras med A^{-1} på respektive **vänster** sida!!!

$$AXB = AB + A^2 \Leftrightarrow A^{-1}AXB = A^{-1}(AB + A^2) \Leftrightarrow [A^{-1}A = I] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow IXB = A^{-1}AB + A^{-1}AA \Leftrightarrow [IX = X] \Leftrightarrow XB = IB + IA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} IB = B \\ IA = A \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow XB = B + A \Leftrightarrow XBB^{-1} = (B + A)B^{-1} \Leftrightarrow [B^{-1}B = I] \Leftrightarrow XI = BB^{-1} + AB^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = I + AB^{-1}$$

OBS!

respektive led multipliceras med B^{-1} på respektive **höger** sida!!!

Svar: $X = I + AB^{-1}$