Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Tentamen i Linjär algebra
2022-03-24 kl 08-13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Endast skrivmaterial (penna, suddgummi, passare, linjal) får användas.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. För betyg G räcker 8 poäng, för betyg VG räcker 14 poäng.
Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

Bonus får tillgodoräknas från kontrollskrivning 2022-02-14. Observera att denna bonus enbart gäller för betyget godkänd.

Skriv på omslaget hur många bonuspoäng du har. (B=1, B=2 eller B=3)

Skriv klart och tydligt och med så utförliga motiveringar att din tankegång är lätt att följa, steg för steg. Lösningarna skall vara avslutade med ett svar (svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt).

För att markera hur den enskilda uppgiften bedömts ges poäng mellan 0 och 3. En lösning utan förklarande text kan aldrig ge mer än 2 poäng.
En lösning som innehåller något allvarligt fel i mer elementär matematik (som inte är uppenbart slarv) ger inte någon poäng alls (gäller även om uppgiften består av flera deluppgifter).

OBS! Inte korrekta beräkningar som kan kontrolleras betraktas inte som slarvfel.

Följ föreläsnings och lektions anteckningar! **inga** "färdiga" formler för avbildningar, avstånd osv. som inte tagits upp under kursens gång kan användas i så fall ska det tas fram först klart och tydligt med hjälp av lämplig figur. Rita alltid en figur!

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ för planet eller $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ för rummet.

1.

a) Bestäm koordinaterna för spegelbilden av punkten $(0,2,1)$ i planet $2x - 2y - z = 4$. (2p)

b) Bestäm den punkt där linjen genom punkten $(0,2,1)$ och dess spegelbild i planet $2x - 2y - z = 4$ skär planet $2x - 2y - z = 4$.

Obs: Utgå från en figur med tydliga beteckningar.

2.

a) För vilka värden på konstanten a är matrisen A inverterbar?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$$

b) Ange alla värden på konstanten a som gör att ekvationssystemet nedan har oändligt många lösningar. Lös också systemet för dessa värden på a.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x - y + az = 2 \\ ax \quad + az = 1 \end{cases}$$

3. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -2 \\ x_1 + 2x_2 = 9 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$$

a) Visa att systemet saknar lösning.
b) Bestäm systemets minstakvadratlösning.
c) Planet Π har ekvationen $(x,y,z) = s(1,1,1) + t(4,2,-2)$. Vilken punkt på Π ligger närmast $(-2,9,3)$?

4. Avgör om mängden $\{\vec{s}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ är linjärt oberoende eller beroende. Skriv sedan om möjligt någon av vektorerna som en linjärkombination av de övriga. Kontrollera ditt svar.

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

5. Låt F ges av matrisen $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Finn samtliga egenvärden och egenvektorer till F. Kontrollera.

6. Avbildningen F utgörs av vinkelrät projektion på linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Bestäm en ON-bas $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ bestående av egenvektorer till F. 1p

b. Bestäm avbildningsmatrisen för F, både i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ och i standardbasen med hjälp av $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ bestående av egenvektorer till F. Motivera noga.

lycka till !