Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: KTR1

Facit

2019-02-13

Om inget annat sägs är koordinater och vektorer givna i standardbasen.

1. Låt $\vec{u} = (3, 1, -2)$ och $\vec{v} = (1, -3, 4)$. Beräkna $\vec{u}\cdot\vec{v}$ och bestäm en vektor $\vec{w}$ som är vinkelrät mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$ samt uppfyller villkoret $|\vec{w}| = 1$.

Lösningsskiss:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 - 3 - 8 = -8$$

Sök $\vec{w}$.

Vi vet att $(\vec{w}//\vec{u}\times\vec{v}$ alltså $\vec{w} = k(\vec{u}\times\vec{v}))$ och $|\vec{w}| = 1$.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ -10 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{medför att} \quad \vec{w} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vidare gäller att $|\vec{w}| = 1$ alltså

$$|\vec{w}| = \left| k\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = |k|\cdot\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = |k|\cdot\sqrt{1^2+7^2+5^2} = |k|\cdot\sqrt{1^2+7^2+5^2} = |k|\cdot\sqrt{75} = |k|\cdot\sqrt{25\cdot 3} =$$

$$= |k|\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{3} == |k|\cdot 5\sqrt{3} = 1$$

Ekvationen $|k|\cdot 5\sqrt{3} = 1$ ger då att $|k| = \dfrac{1}{5\sqrt{3}} \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{1}{5\sqrt{3}}$

som ger $\vec{w} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \pm\dfrac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ Obs! i uppgiften söker vi bara en sådan vektor

Facit: $\vec{u}\cdot\vec{v} = -8$, $\vec{w} = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

2. Betrakta de två linjerna $l_1 : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 3 - s \\ z = 2 + s \end{cases}$ och $l_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ samt

a) avgör om linjerna skär varandra (och om så är fallet ange då även koordinaterna för skärningspunkten)

Lösningsskiss:

$$\begin{array}{l} ekv.1 \\ ekv.2 \\ ekv.3 \end{array} \quad \begin{cases} 1 - s = 2 + t \\ 3 - s = 3 + 2t \\ 2 + s = 1 - t \end{cases}$$

ekv2+ekv3 ger $5 = 4 + t \Leftrightarrow t = 1$ insättning av $t = 1$ i ekv3 ger $2 + s = 0 \Leftrightarrow s = -2$. Vidare insättning av $t = 1$ och $s = -2$ i ekv1 ger $1 - (-2) = 2 + 1 \Leftrightarrow 3 = 3$, alltså $t = 1$ och $s = -2$ är lösningen till systemet och detta medför att linjerna skär varandra.

sätt nu t=1 i l_2 :s ekvation

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ för $t = 1$ blir skärningspunktens koordinater $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases}$

Facit: Linjerna skär varandra i punkten $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Obs! du kan kontrollera att du får samma punkt då s=-2 sätts i l_1 :s ekvation

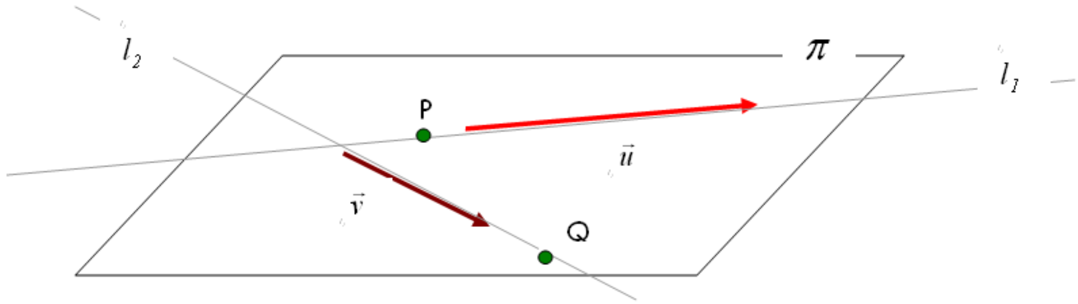
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

b) bestäm ekvationen på parameterfri form (normalform) för det plan π som innehåller de båda linjerna

Lösningsskiss:

$$l_1: \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 3 - s \\ z = 2 + s \end{cases} \quad \text{och} \quad l_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

" tanke " skiss



Följer vi bildens beteckningar blir

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ och } Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ där planets normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

är $\vec{n} \,//\, \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, tag $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi söker $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow x + z + D = 0$, insättnig av t.ex $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ i

$\pi:s$ ekvation ger

$1 + 2 + D = 0 \Leftrightarrow D = -3 \Rightarrow \pi:\text{s ekvation är } x + z - 3 = 0.$

Facit: $\pi:\text{s ekvation är } x + z - 3 = 0.$

3. Lös ekvationen $2X - B^{-1} = AX + 2C$,

där $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Lösningsskiss:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = 10 \neq 0,$$

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

$\det C = \det \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$, alltså A, B och C är inverterbara

$$2X - B^{-1} = AX + 2C \Leftrightarrow 2X - AX = 2C + B^{-1} \Leftrightarrow (2 \cdot I - A)X = 2C + B^{-1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} om \\ \det(2 \cdot I - A) \neq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2 \cdot I - A)^{-1}(2 \cdot I - A)X = (2 \cdot I - A)^{-1}\left(2C + B^{-1}\right) \Leftrightarrow I \cdot X = (2 \cdot I - A)^{-1}\left(2C + B^{-1}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X = (2 \cdot I - A)^{-1}\left(2C + B^{-1}\right)$$

Visöker $B^{-1} = [\text{gör egna beräkningar här}] = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Vi söker

$(2 \cdot I - A)^{-1} = \left(2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1} =$ [gör egna beräkningar här] $= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Vi söker $\left(2C + B^{-1}\right) = 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} =$ [gör egna beräkningar här] $= \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

Alltså $X = (2 \cdot I - A)^{-1}\left(2C + B^{-1}\right) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} =$ [gör egna beräkningar här] $=$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -21 \end{bmatrix}$$

Facit: $X = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -21 \end{bmatrix}$

4. Bestäm avståndet mellan båda linjerna

$$l_1 : \begin{cases} x = -1 - 2s \\ y = -3 - s \\ z = \quad s \end{cases} \quad \text{och} \quad l_2 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ där } t, s \in \Re.$$

Lösningstips:

Utgå från föreläsningsanteckningar (Fö 3).

Facit: avståndet mellan båda linjerna är $d = \sqrt{14}$ $l.e.$

5. För en linjär avbildning F gäller följande:

$$\begin{cases} F(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ F(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \\ F(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3) = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{cases}$$

Bestäm avbildningens matris A.

Lösningstips:

Utgå från lektionens/föreläsnings-anteckningar . (mer exempel i Boken)

Du söker $A = \begin{bmatrix} F(\vec{e}_1) & F(\vec{e}_2) & F(\vec{e}_3) \end{bmatrix}$

Facit: $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 6 & -9 & -6 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

Kontroll:

OBS! Du kan alltid kontrollera om $\begin{cases} F(\vec{e}_1) = A \cdot \vec{e}_1 \\ F(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) = A \cdot (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) \\ F(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3) = A \cdot (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3) \end{cases}$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: KTR1

6. Låt F vara spegling i planet $x+2y-z=0$.

a) Beräkna F:s avbildningsmatris A. Kontrollera att planets normal samt en vektor i planet avbildas som det ska. **Utgå** ifrån en bild med tydliga beteckningar!

Lösningstips:

Utgå från lektionens/föreläsnings-anteckningar . (mer exempel i Boken)

Facit: $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) Använd a) till att beräkna vinkeln mellan vektorn $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och dess spegelbild.

Lösningsskiss:

Om $\vec{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ blir spegelbilden av den $\vec{v}=A\cdot\vec{u}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=[\text{fyll i}]=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Vidare ger skalärprodukten

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\text{[...fyll i och gör egna beräkningar]}=$$

$$=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=60^\circ=\frac{\pi}{3}$$

Facit: Vinkeln mellan vektorn $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och dess spegelbild är $\alpha=60^\circ=\frac{\pi}{3}$.