Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: KTR1

# Lösningsskisser

2022-02-14, kl. 14-18

1. Lösningsskiss: (alltså en fullständig lösning skall kompletteras med en del beräkningar som saknas nedan)

$$ABX = E - CDX \Leftrightarrow ABX + CDX = E \Leftrightarrow (AB + CD)X = E$$

Om $(AB + CD)$ är inverterbar (OBS: $(AB + CD)$ är typ 2x2) blir

$$(AB + CD)X = E \Leftrightarrow (AB + CD)^{-1}(AB + CD)X = (AB + CD)^{-1}E \Leftrightarrow I \Leftrightarrow IX = (AB + CD)^{-1}E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = (AB + CD)^{-1}E$$

Först:

$$AB + CD = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(AB + CD) = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3 \neq 0$$ alltså $(AB + CD)$ är inverterbar.

Vi vet att om $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\det P \neq 0$ blir $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Då blir $(AB + CD)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ och vidare enligt $X = (AB + CD)^{-1}E$ fås

$$X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.

Om lösningen: (alltså en fullständig lösning skall kompletteras med en del beräkningar och kommentarer som saknas nedan)

Punkten $P$ har koordinaterna $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ och $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$. Så

$\overrightarrow{PA} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{PB} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ och $\overrightarrow{PC} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

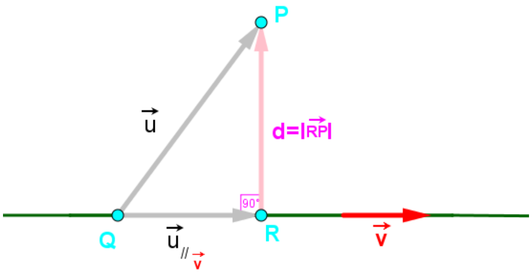
Låt vinklarna mellan $\overrightarrow{PA}$ och $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PB}$ och $\overrightarrow{PC}$ respektive $\overrightarrow{PC}$ och $\overrightarrow{PA}$ vara $\alpha, \beta$ respektive $\gamma$.

Då gäller att $\overrightarrow{PA} \bullet \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| \cos\alpha$ som efter respektive insättning ger att $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. På samma sätt får vi $\cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{2}$, dvs. $\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$.

Svar: Vinklarna mellan $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ är $\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$.

**3.**

Lösningsskiss: (alltså en fullständig lösning skall kompletteras med en del beräkningar som saknas nedan)




Låt $P = (2,\ 1,\ 0)$, $Q = (-1,\ -4,\ -1)$ och $S = (2,\ -1,\ 8)$. Vidare är $\overrightarrow{QR} = \vec{u}_{//\vec{v}}$ ortogonalprojektion av $\overrightarrow{QP} = \vec{u}$ på linjen med riktningsvektorn parallell med $\vec{v} = \overrightarrow{QS}$.

Projektionssatsen ger då $\overrightarrow{QR} = \vec{u}_{//\vec{v}} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}$.

Vidare med hjälp av given figur fås att $\vec{u}_{//\vec{v}} + \overrightarrow{RP} = \vec{u}$ alltså $\overrightarrow{RP} = \vec{u} - \vec{u}_{//\vec{v}} = \vec{u} - \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}$.

Avståndet som sökes ges då av $d = |\overrightarrow{RP}| = |\vec{u} - \vec{u}_{//\vec{v}}| = \left|\vec{u} - \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}\right| = \left|\overrightarrow{QP} - \frac{\overrightarrow{QP} \bullet \overrightarrow{QS}}{|\overrightarrow{QS}|^2} \overrightarrow{QS}\right| =$

$$= \left|\overrightarrow{QP} - \frac{\overrightarrow{QP} \bullet \overrightarrow{QS}}{|\overrightarrow{QS}|^2} \overrightarrow{QS}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}3\\3\\9\end{pmatrix}}{99} \begin{pmatrix}3\\3\\9\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} - \frac{3 \cdot \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}}{99} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} - \frac{11}{11} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}\right| =$$

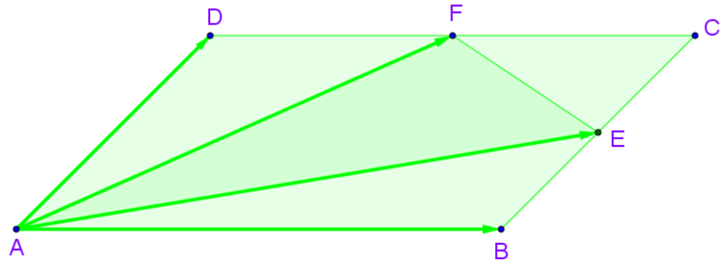
$$= \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6}$$

Svar: $d = 2\sqrt{6}$ l.e.

**4.** Svar: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $s, t \in \Re$.

**5.**

Lösningsskiss: (alltså en fullständig lösning skall kompletteras med en del beräkningar som saknas nedan)




a) Betrakta parallellogrammen $ABCD$ i figur.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ och}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Svar: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b) Triangeln $AEF$ :s area $= A_{AEF} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AF}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \times \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\right| =$

$$= (\text{ fyll } i) = \frac{3}{8}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$$

Parallellogramet $ABCD$ :s area $= A_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$

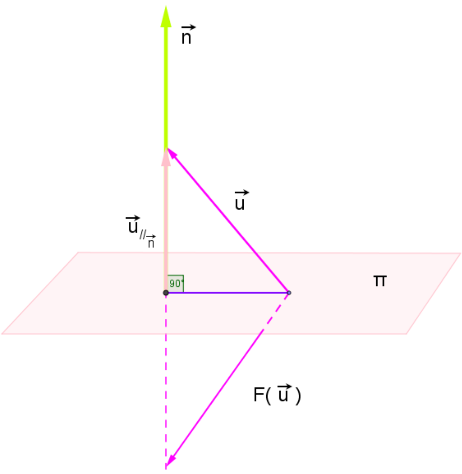
$$\frac{A_{AEF}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{3}{8}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|} = \frac{3}{8}$$

Svar: Förhållandet mellan triangeln $AEF$ :s area och hela $ABCD$ :s area är $\frac{A_{AEF}}{A_{ABCD}} = \frac{3}{8}$.

## 6.

Lösningsskiss: (alltså en fullständig lösning skall kompletteras med en del beräkningar som saknas nedan)

a)




Låt $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ och $F(\vec{u})=\begin{pmatrix}x`\\y`\\z`\end{pmatrix}$ $Q=(-1,\ -4,\ -1)$

och $S=(2,\ -1,\ 8)$. Vidare är $\vec{u}_{//\vec{n}}$ ortogonalprojektion av $\vec{u}$ på $\vec{n}$.

Projektionssatsen ger då $\vec{u}_{//\vec{n}}=\dfrac{\vec{u}\bullet\vec{n}}{\vec{n}\bullet\vec{n}}\vec{n}$.

Vidare med hjälp av given figur fås att $F(\vec{u})+2\vec{u}_{//\vec{n}}=\vec{u}$ alltså

$$F(\vec{u})=\vec{u}-2\vec{u}_{//\vec{n}}=\vec{u}-2\cdot\frac{\vec{u}\bullet\vec{n}}{\vec{n}\bullet\vec{n}}\vec{n}\ .$$

$$F(\vec{u})=\begin{pmatrix}x`\\y`\\z`\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-2\cdot\frac{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2x+2y-2z\\2x+2y-2z\\-2x-2y+2z\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3x-2x-2y+2z\\3y-2x-2y+2z\\3z+2x+2y-2z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}x-2y+2z\\-2x+y+2z\\2x+2y+z\end{pmatrix}$$ som ger i matrisform

$$F(\vec{u})=\begin{bmatrix}x`\\y`\\z`\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$ . Avbildningsmatrisen ges av $A=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$.

Vid spegling blir bilden av planets normal $F(\vec{n})=A\cdot\vec{n}=-\vec{n}$ och bilden av två icke parallella vektorer i planet avbildas på sig själva. Alltså om $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är två icke parallella vektorer i planet så blir $F(\vec{a})=A\cdot\vec{a}=\vec{a}$ och $F(\vec{b})=A\cdot\vec{b}=\vec{b}$ .

Kontroll:

$$F(\vec{n})=F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)=A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}-3\\-3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=-\vec{n}$$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska



$$F(\vec{a}) = F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{a}$$

$$F(\vec{b}) = F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

Svar: $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $F(\vec{n}) = -\vec{n}$, $F(\vec{a}) = A \cdot \vec{a} = \vec{a}$ och $F(\vec{b}) = A \cdot \vec{b} = \vec{b}$ ser ovan.

b)

$$F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vinkeln mellan $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ges mha. def. för skalärprodukt $\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\alpha$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2} \cos\alpha \Leftrightarrow -1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cos\alpha \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-1}{5}\right)$. Obs: att vi söker bara en vinkel!

Svar: Spegelbilden blir $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vinkeln är $\alpha = \arccos\left(\frac{-1}{5}\right)$.