Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Facit

2023-10-23, kl. 14-18

1. Lösningsskiss:

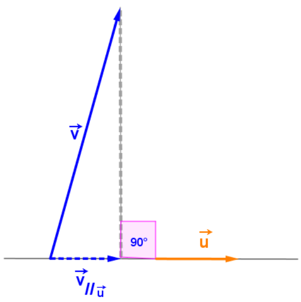
Standardberäkningar ger $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow X^t = A^{-1}B = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Svar: $X = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

2.

a. Redogör för projektionsformeln. Utgå ifrån figur med tydliga beteckningar.



Projektionssatsen ger då $\vec{v}_{//\vec{u}} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}}\vec{u}$.

Svar: Projektionsformeln ges av $\vec{v}_{//\vec{u}} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}}\vec{u}$.

b.

Lösningsskiss:

Vi söker $\vec{u}_{//\vec{v}} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}}\vec{v}$.

Där

$\vec{v} \bullet \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0^\circ = 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$

och

$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 30^\circ = 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Insättning av respektive ger $\vec{u}_{//\vec{v}} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}}\vec{v} = \frac{6\sqrt{3}}{16}\vec{v} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\vec{v}$

Svar: Projektionen av $\vec{u}$ på vektorn $\vec{v}$, uttryckt i $\vec{v}$ är $\vec{u}_{//\vec{v}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\vec{v}$.

3. Lösningsskiss:

$$A-\lambda\cdot I=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}-\pi\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\ldots=\begin{bmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 4-\lambda\end{bmatrix}$$

Matrisen $A-\lambda\cdot I$ saknar invers om $det(A-\lambda\cdot I)=0$.

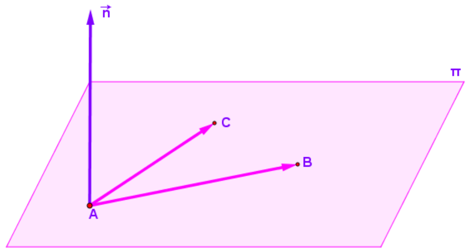
3. Alltså vi söker löning till ekvationen $det\begin{bmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 4-\lambda\end{bmatrix}=0.$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(1-\lambda)(4-\lambda)-4=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\lambda^2-5\lambda=0\Leftrightarrow\lambda(\lambda-5)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\lambda=0$ eller $\lambda-5=0\Leftrightarrow\lambda=0$ eller $\lambda=5$

Svar: För $\lambda=0$ eller $\lambda=5$ saknar matrisen $A-\lambda\cdot I$ invers.

4. Betrakta planet som innehåller de tre punkterna $A=(2,0,0)$, $B=(2,1,1)$ och $C=(1,0,-1)$.



a. Lösningsskiss:

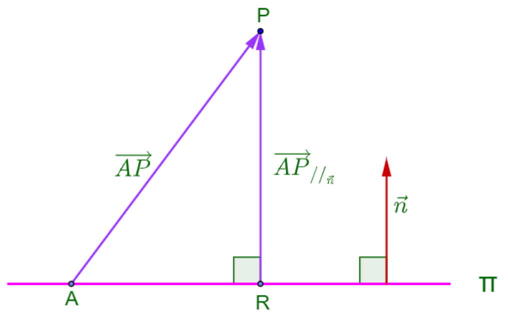
$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\text{ och }\vec{n}\,//\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}.$$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\ldots=-\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, tag t.ex. $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, ekvation för planet på normalform är

$Ax+By+Cz+D=0$ där $\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\vec{n}$. Alltså det sökta planets ekvation blir $x+y-z+D=0$ och insättningen av t.ex. punktens $B=(2,0,0)$ koordinater i ekvationen ger $D=-2$ och vidare efter insättningen av $D=-2$ i planets ekvation får vi $x+y-z-2=0$.

Svar: Planets ekvation på normalform är $x+y-z-2=0$.

b. Lösningsskiss: (alltid utgå från en figur med tydliga beteckningar)



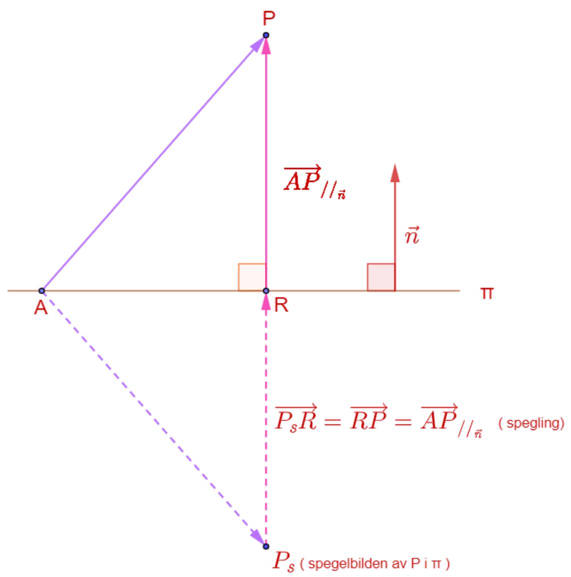
För $P=(2,5,-2)$ och t.ex. $A=(2,\ 0,\ 0)$ blir $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{AP}_{//\vec{n}}$ ortogonalprojektion av $\overrightarrow{AP}$ på $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Projektionssatsen ger då $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{AP}_{//\vec{n}}=\dfrac{\overrightarrow{AP}\bullet\vec{n}}{\vec{n}\bullet\vec{n}}\vec{n}$. Avståndet vi söker är $d=\left|\overrightarrow{RP}\right|$ alltså

$$d=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\bullet\vec{n}}{\vec{n}\bullet\vec{n}}\vec{n}\right|=\left|\frac{\begin{pmatrix}2-2\\5-0\\-2-0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{7}{3}\right|\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|=\frac{7}{3}\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Svar: $d=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ l.e. (alternativt svar $d=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$ l.e.)

c. Lösningsskiss: (alltid utgå från en figur med tydliga beteckningar)



Från b. får vi att $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{RP}=\dfrac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Vi söker koordinater för spegelbilden av punkten $P=(2,5,-2)$ i planet.

Låt $P_S=\begin{pmatrix}x_S\\y_S\\z_S\end{pmatrix}$ vara koordinater för spegelbilden av punkten $P=(2,5,-2)$ i planet.

Med hjälp av figuren får vi följande samband:

$$\overrightarrow{AP_s} + 2\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP_s} = \overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{RP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP_s} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{RP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP_s} = \overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{OA}$$

Som efter insättningen av respektive ger:

$$\begin{pmatrix} x_S - 0 \\ y_S - 0 \\ z_S - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{14}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ -14 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0-14+6 \\ 15-14 \\ -6+14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Svar: Punkten är $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

5. Lösningsskiss: (alltså en fullständig lösning skall kompletteras med en del beräkningar som saknas nedan)

Punkten P har koordinaterna $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ och $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$.

Så $\overrightarrow{PA} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{PB} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ och $\overrightarrow{PC} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Låt vinklarna mellan $\overrightarrow{PA}$ och $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PB}$ och $\overrightarrow{PC}$ respektive $\overrightarrow{PC}$ och $\overrightarrow{PA}$ vara α, β respektive γ.

Då gäller att skalärprodukten

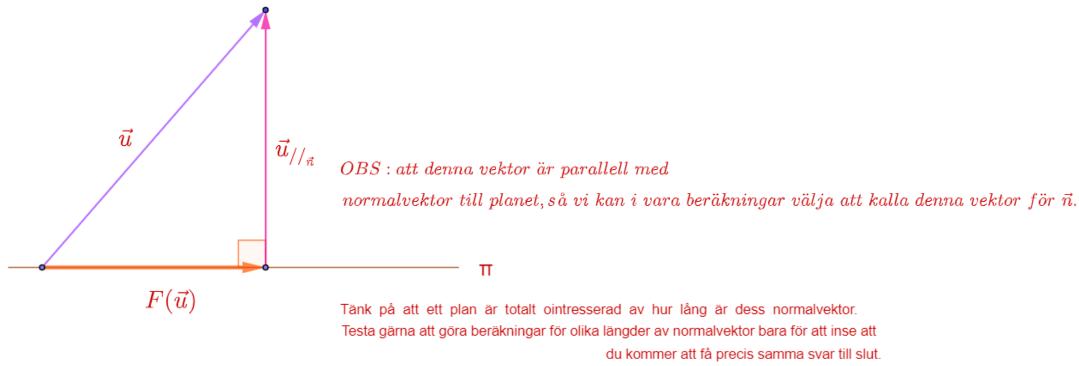
$\overrightarrow{PA} \bullet \overrightarrow{PB} = -\frac{1}{3}$ och vidare $\overrightarrow{PA} \bullet \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| \cdot \cos\alpha$.

Således $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PA} \bullet \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = -\frac{1}{2}$. På samma sätt kan vi få $\cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{2}$, dvs,

$\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$.

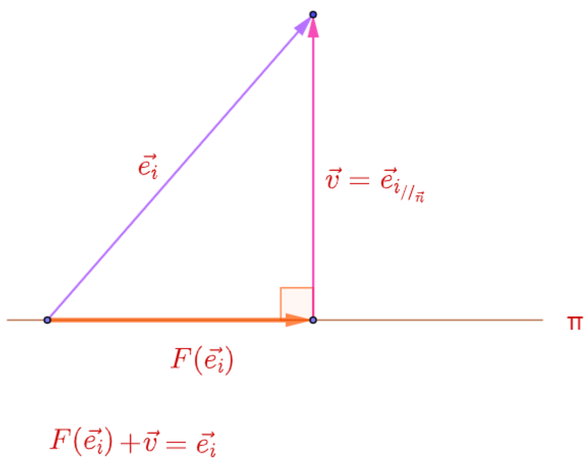
Svar: $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3}$

6. Lösningsskiss: (alltså en fullständig lösning skall kompletteras med en del beräkningar som saknas nedan)



Vektorn $\vec{n}=\vec{u}-F(\vec{u})=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ måste (Obs: RITA!) vara normal till sökta planet Π. Eftersom origo ligger i Π blir Π:s ekvation $x+2y-z=0$ och vi ser att $F(\vec{u})$ verkligen är en vektor i detta plan , vilket är ett måste om F ska kunna vara ortogonalprojektionen.

Enligt projektionsformeln (rita bild)



ges $\vec{e}_1$: s ortogonalprojektion på $\vec{n}$ av $\vec{v}=\dfrac{\vec{e}_1\bullet\vec{n}}{\vec{n}\bullet\vec{n}}\vec{n}\Rightarrow\vec{v}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

I en omsorgsfullt ritad figur ses att $F(\vec{e}_1)=\vec{e}_1-\vec{v}\Rightarrow F(\vec{e}_1)=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$.

På motsvarande sätt fås att $F(\vec{e}_2)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ och $F(\vec{e}_3)=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$.

Sökta avbildningsmatrisen blir alltså $A = \left[F(\vec{e}_1) \quad F(\vec{e}_2) \quad F(\vec{e}_3) \right] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Svar: Π :s ekvation är $x + 2y - z = 0$. $A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.