Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: KTR1

Lösningsskisser

2023-02-13, kl. 14-18

1.

Lösningsskiss: (alltså en fullständig lösning skall kompletteras med en del beräkningar som saknas nedan)

$$E - ABX = CDX \Leftrightarrow ABX + CDX = E \Leftrightarrow (AB+CD)X = E$$

Om $(AB+CD)$ är inverterbar (OBS: $(AB+CD)$ är typ 2x2) blir

$$(AB+CD)X = E \Leftrightarrow (AB+CD)^{-1}(AB+CD)X = (AB+CD)^{-1}E \Leftrightarrow IX = (AB+CD)^{-1}E \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X = (AB+CD)^{-1}E$$

Först:

$$AB + CD = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(AB+CD) = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3 \neq 0$$ alltså $(AB+CD)$ är inverterbar.

Vi vet att om $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\det P \neq 0$ blir $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

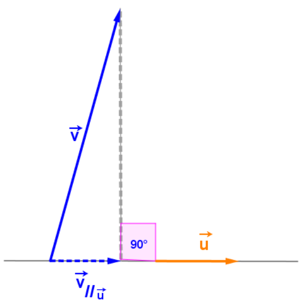
Då blir $(AB+CD)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ och vidare enligt $X = (AB+CD)^{-1}E$ fås

$$X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.

a. Redogör för projektionsformeln. (Utgå ifrån figur med tydliga beteckningar.)



Projektionssatsen ger då $\vec{v}_{//\vec{u}} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \vec{u}$.

Svar: Projektionsformeln ges av $\vec{v}_{//\vec{u}} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \vec{u}$.

b. Bestäm projektionen av $\vec{v}$ på vektorn $\vec{u}$, uttryckt i $\vec{u}$, om $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ och vinkeln mellan dem är 60°.

Lösningsskiss:

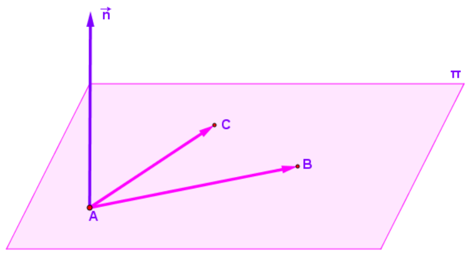
Vi söker $\vec{v}_{//\vec{u}} = \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \vec{u}$.

Där $\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$ och $\vec{v} \bullet \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} = 6$.

Insättning av respektive ger $\vec{v}_{//\vec{u}} = \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \vec{u} = \dfrac{6}{9} \vec{u} = \dfrac{2}{3} \vec{u}$

Svar: Projektionen av $\vec{v}$ på vektorn $\vec{u}$, uttryckt i $\vec{u}$ är $\vec{v}_{//\vec{u}} = \dfrac{2}{3} \vec{u}$.

3. Betrakta planet som innehåller de tre punkterna $A = (1,1,1)$, $B = (0,5,0)$ och $C = (6,2,-1)$.



a. Bestäm planets ekvation på normalform.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ och } \vec{n} \,//\, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \ldots = -7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, tag t.ex. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, ekvation för planet på normalform är

$Ax + By + Cz + D = 0$ där $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \vec{n}$. Alltså det sökta planets ekvation blir $x + y + 3z + D = 0$ och insättningen av t.ex. punktens $B = (0,5,0)$ koordinater i ekvationen ger $D = -5$ och vidare efter insättningen av $D = -5$ i planets ekvation får vi $x + y + 3z - 5 = 0$.

Svar: Planets ekvation på normalform är $x + y + 3z - 5 = 0$.

b. Bestäm det minsta avståndet från punkten $P=(0,-1,1)$ till planet. Utgå ifrån figur med tydliga beteckningar. Motivera noga.

Lösningsskiss: (alltså en fullständig lösning skall kompletteras med en del beräkningar som saknas nedan)

För $P=(0,-1,1)$ och t.ex. $Q=(5,\ 0,\ 0)$ blir $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{QP}_{//\vec{n}}$ ortogonalprojektion av $\overrightarrow{QP}$ på $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

Projektionssatsen ger då $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{QP}_{//\vec{n}}=\dfrac{\overrightarrow{QP}\bullet\vec{n}}{\vec{n}\bullet\vec{n}}\vec{n}$. Avståndet vi söker är $d=\left|\overrightarrow{RP}\right|$ alltså

$$d=\left|\frac{\overrightarrow{QP}\bullet\vec{n}}{\vec{n}\bullet\vec{n}}\vec{n}\right|=\left|\frac{\begin{pmatrix}0-5\\-1-0\\1-0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{-3}{11}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{-3}{11}\right|\left|\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right|=\frac{3}{11}\sqrt{11}=\frac{3\sqrt{11}}{11}.$$

Svar: $d=\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$ l.e. (alternativt svar $d=\dfrac{3}{\sqrt{11}}$ l.e.)

c. Bestäm punkten i planet där det minsta avståndet i b. antas.

Lösningsskiss: Punkten $P=(0,-1,1)$ ligger på linjen $l:(x,y,z)=(0,-1,1)+t(1,1,3)$. Linjens skärnings punkt med planet $x+y+3z-5=0$ ger den punkten i planet där det minsta avståndet i b. antas.

Vi ska lösa systemet $\begin{cases}(x,y,z)=(0,-1,1)+t(1,1,3)\\ x+y+3z-5=0\end{cases}$ alltså

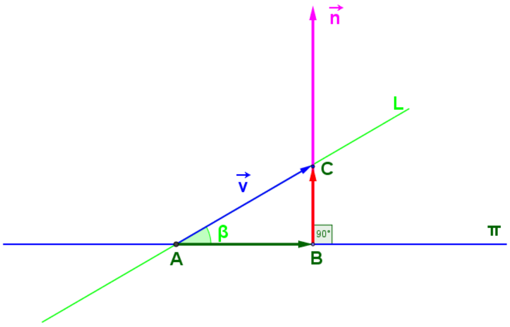
$$(0+t)+(-1+t)+3(1+3t)-5=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow t=\frac{3}{11}$$

För $t=\dfrac{3}{11}$ blir den sökta punktens koordinater $l:(x,y,z)=(0,-1,1)+\dfrac{3}{11}(1,1,3)=\dfrac{1}{11}(3,-8,20)$

Svar: Punkten i planet där det minsta avståndet i b. antas är punkten med koordinater $(x,y,z)=\dfrac{1}{11}(3,-8,20)$.

4. Beräkna vinkeln mellan linjen $l:(x,y,z)=(3,2,1)+t(1,0,1)$ och planet $x+y+3=0$. Utgå ifrån figur med tydliga beteckningar. Motivera noga.

Lösningsskiss: Vi söker β. (Obs: många olika lösningsskisser kan göras) T.ex. hittar vi vinkeln mellan vektor $\vec{v}$ och normalen till planet m.h.a skalärprodukten, kan vi sedan använda oss av att summan av alla vinklar i en triangel är 180°.



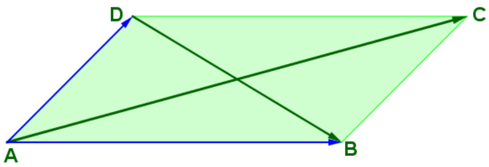
Svar: Den sökta vinkeln är $\beta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$.

Obs: Övning! Utgå från figuren och sök lösning!

5. Betrakta en parallellogram $ABCD$ (hörnen ordnade moturs). Rita figur!

a. Uttryck vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AD}$ med hjälp av vektorerna $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{DB}$ alltså i basen $\{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}\}$. Motivera noga!

Lösningsskiss:



$$\begin{cases}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\end{cases}$$

ekv.1 + ekv2. ger $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

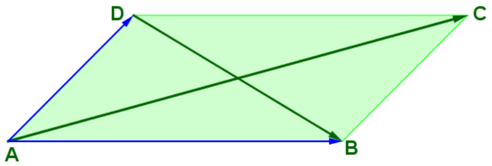
och vidare ekv.1 - ekv2. ger $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

Svar: $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

b. Bestäm arean av parallellogram som har diagonalvektorerna $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Motivera noga!

Lösningsskiss: (alltså en fullständig lösning skall kompletteras med en del beräkningar som saknas nedan)



Arean av parallellogram ges av

Area $= \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$ där (från del a) $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ och $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

Insättning av respektive $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ger:

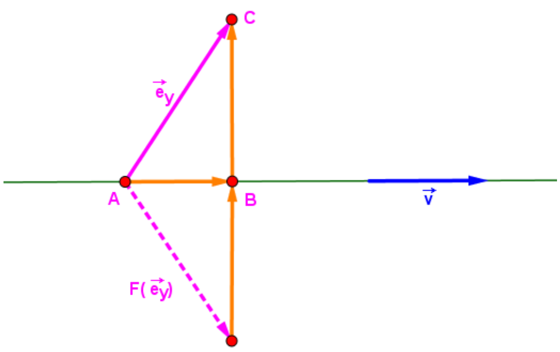
$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \ldots = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Vidare blir Area $= \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \ldots = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(1)^2 + (7)^2 + (5)^2} = \ldots = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Svar: Area $= 5\sqrt{3}$ a.e.

6. Matrisen A som representerar en spegling i en linje genom origo avbildar basvektor $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ på vektorn $\begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm ekvationen för speglingslinjen på normalform.



Vi har: $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $F(\vec{e}_y) = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$.

Vidare (ser bilden): $F(\vec{e}_y) + 2\overrightarrow{BC} = \vec{e}_y$

där

$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_y - F(\vec{e}_y)\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}\right) = \ldots = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

Ty $\overrightarrow{BC} \bullet \vec{v} = 0$, blir linjes riktningsvektor (t.ex.) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och

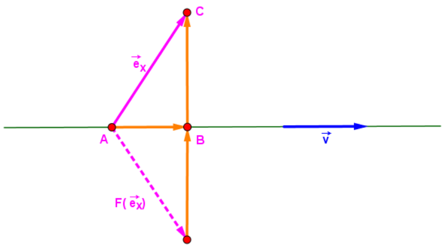
därmed linjens ekvation i parameterform $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \Re$ och i parameterfri form

$x - 2y = 0$.

Svar: Ekvationen för speglingslinjen på normalform är $x - 2y = 0$.

b) Bestäm avbildningens matris A.

Vi har redan $F(\vec{e}_y) = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$. För att bestämma A söker vi nu $F(\vec{e}_x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Rita figur och sätt upp samband av betydelse där både riktningsvektor och normalen till speglingslinjen togs fram i a).



Från bilden:

$F(\vec{e}_x) + 2\overrightarrow{BC} = \vec{e}_x \Leftrightarrow F(\vec{e}_x) = \vec{e}_x - 2\overrightarrow{BC}$ där enligt projektionssatsen är

$\overrightarrow{BC} = \vec{e}_{x\ //\vec{n}} = \dfrac{\vec{e}_x \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}} \vec{n}$, där från linjens normalekvation fås direkt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(Obs: att vektor $\overrightarrow{BC}$ är så klart inte samma för respektive basvektor!!! Utgå alltid från en tydlig figur för att förstå)

alltså $F(\vec{e}_x) = \vec{e}_x - 2\dfrac{\vec{e}_x \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}} \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F(\vec{e}_x) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}.\ A = \left[F(\vec{e}_x)\quad F(\vec{e}_y)\right] = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

Svar: $A = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$