Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

Facit/lösningsförslag
2016-08-17

1. Låt ℓ vara linjen med parameterform $(x,y,z)=(1,1,0)+s(1,2,3)$ och låt ℓ_1 vara skärningslinjen mellan planet $x+y+z=1$ och planet $z=0$.

a) Skriv ℓ_1 på parameterform. 1p

b) Beräkna avståndet mellan ℓ och ℓ_1. 2p

a) "Minimalt" lösningsförslag:

Ekvationssystemet som ges av normalformerna för de två planen

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=0 \end{cases}$$

(...fullständig, välmotiverad och ordentligt skriven lösning krävs för full poäng ...fyll i :) har lösningen $(x,y,z)=(1-t,t,0)=(1,0,0)+t(-1,1,0)$ där $t\in\Re$. Detta blir också en parameterform för ℓ_1.

Svar: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $t\in\Re$.

b) (...fullständig, välmotiverad och ordentligt skriven lösning krävs för full poäng ...fyll i :)

Svar: Det kortaste avståndet mellan de två linjerna är $\frac{1}{\sqrt{3}}$ l.e. (längd enheter).

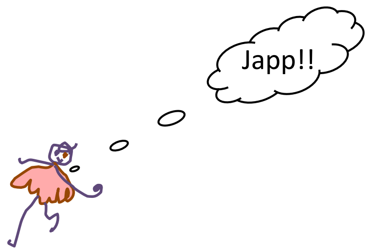
2. Låt S vara speglingen i planet $x-3y+2z=0$. Finn matrisen för S. Beräkna sedan speglingen av planets normalvektor samt av vektorn $(3,8,1)$.

"Minimalt" lösningsförslag:

(...fullständig, välmotiverad och ordentligt skriven lösning krävs för full poäng ...fyll i :)

Speglingens matris blir

$$S=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$



Speglingen av planets normalvektor $\vec{n}=(1,-3,2)$ blir $S\cdot\vec{n}=(-1,3,-2)=-\vec{n}$

Speglingen av $(3,8,1)$ fås på samma sätt och är $\frac{1}{7}(40,-1,45)$.

Svar: Speglingens matris blir $S=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$. Speglingen av planets normalvektor är vektor $(-1,3,-2)=-\vec{n}$. Speglingen av $(3,8,1)$ är $\frac{1}{7}(40,-1,45)$.

3. Undersök om matrisen

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

har några egenvärden, samt bestäm i förekommande fall dessa tillsammans med motsvarande egenvektorer. Är matrisen diagonaliserbar?

"Minimalt" lösningsförslag:

(…fullständig, välmotiverad och ordentligt skriven lösning krävs för full poäng …fyll i :)

Genom direkt uträkning ser man att sekularekvationen blir

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \ldots. \Leftrightarrow -\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=0 \Leftrightarrow \ldots$$
$$(genominsättning\ ser\ man\ att\ \text{-}1\ är\ en\ rot, division\ \ ger\ sen\ )\ldots \Leftrightarrow -(\lambda+1)^3=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$$

Det finns alltså ett enda egenvärde $\lambda=-1$ och dess egenvektorer är $t(-1,-1,1)$. Matrisen är inte diagonaliserbar eftersom det inte går att hitta en bas för $\Re^3$ av egenvektorer.

Svar: Ett enda egenvärde $\lambda=-1$ och dess egenvektorer är $t(-1,-1,1)$. Matrisen är inte diagonaliserbar eftersom det inte går att hitta en bas för $\Re^3$ av egenvektorer.

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

4. Antag att $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ är vektorer i planet, att $|\vec{u}_1| = 6,\ |\vec{u}_2| = 8,\ |\vec{u}_3| = 7,$ att $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ bildar en vinkel på 30°, att $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_3$ bildar en vinkel på 90°, och att $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$ bildar en vinkel på 120°. Uttryck $\vec{u}_3$ som en linjär kombination av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$.

"Minimalt" lösningsförslag:

(…fullständig, välmotiverad och ordentligt skriven lösning krävs för full poäng …fyll i :)

För att $\vec{u}_3$ är en linjär kombination av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ sätter vi $\vec{u}_3 = a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2$ och beräknar

$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = 6 \cdot 8 \cdot \cos(30^\circ) = 24\sqrt{3}$

$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_3 = 6 \cdot 7 \cdot \cos(90^\circ) = 0$ vidare då $\vec{u}_3 = a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2$ blir

$$\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \bullet (a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2) = a \cdot \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = \ldots = 36a + 24\sqrt{3}b = 0$$

$\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_3 = 8 \cdot 7 \cdot \cos(120^\circ) = 56 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = -28$ vidare då $\vec{u}_3 = a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2$ blir

$$\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_3 = \vec{u}_2 \bullet (a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2) = a \cdot \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2 = \ldots = 24\sqrt{3}a + 64b = -28$$

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 36a + 24\sqrt{3}b = 0 \\ 24\sqrt{3}a + 64b = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \begin{cases} a = \dfrac{7\sqrt{3}}{6} \\ b = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Svar: $\vec{u}_3 = \frac{7\sqrt{3}}{6} \cdot \vec{u}_1 - \frac{7}{4} \cdot \vec{u}_2$

5. Låt $\vec{f}_1 = (1,1,1)$, $\vec{f}_2 = (1,0,1)$ och $\vec{f}_3 = (0,1,1)$.

a) Visa att $(\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3)$ bildar en bas för rummet och bestäm basbytesmatrisen från $(\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3)$ till $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$. Om $\vec{v}$ har koordinaterna $(3,7,2)$ i basen $(\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3)$, vad är dess koordinater i basen $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$?

b) Bestäm koordinaterna för $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{f}_2$ i basen $(\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3)$.

a) "Minimalt" lösningsförslag:

(…fullständig, välmotiverad och ordentligt skriven lösning krävs för full poäng …fyll i :)

Låt $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, så är $\left[\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3\right] = \left[\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right] \cdot T$. Eftersom $\det T = -1$ är T iverterbar. (ska anges varför tydligare!!!…tänk på att detta är bara "Minimalt" lösningsförslag).

Alltså är $(\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3)$ en bas och T är basbytesmatrisen från $(\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3)$ till $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$.

Koordinaterna för $\vec{v}$ i $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ är därmed $T \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix}$.

(Eftersom $\vec{v} = \left[\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3\right] \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \left[\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right] \cdot T \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \left[\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\right] \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix}$.)

Svar: Basbytesmatrisen är $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. $\vec{v}$:s koordinater i basen $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ är $(10,5,12)$.

b)

Basbytesmatrisen från $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ till $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ är $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ så

koordinaterna för $3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ i basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ blir $T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Koordinaterna

för $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{f}_2$ i basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ blir alltså $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Svar: Koordinaterna för $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{f}_2$ i basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ blir alltså $(4,1,-2)$.

6. En linjär avbildning från planet till rummet är en funktion $F : \Re^2 \to \Re^3$ som uppfyller att $F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v})$ och att $\lambda F(\vec{u}) = F(\lambda \vec{u})$ för alla vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ och reella tal λ (alltså precis samma krav som för en linjär avbildning från planet till planet eller från rummet till rummet). Varje sådan avbildning bestäms av en 3×2 matris (på samma sätt som varje avbildning på rummet ges av en 3×3 matris).

   Bestäm matrisen för den avbildning $T : \Re^2 \to \Re^3$ som avbildar vektor $(2,\ 1)$ på $(1,\ 3,\ \text{-}1)$ och vektor $(-1,\ 0)$ på $(2,\ 0,\ \text{-}1)$. Finn matrisen för denna avbildning.

lösningsförslag:

Låt $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ vara basen i planet. Då är $(2,\ 1) = 2 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 = 2 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

och $(-1,\ 0) = -1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$.

Följaktligen $(1,\ 3,\ \text{-}1) = T \cdot (2,\ 1) = T \cdot (2 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 2T \cdot \vec{e}_1 + T \cdot \vec{e}_2$ *

samt

$(2,\ 0,\ \text{-}1) = T \cdot (-1,\ 0) = T \cdot (-\vec{e}_1) = -T \cdot \vec{e}_1$ alltså $(2,\ 0,\ \text{-}1) = -T \cdot \vec{e}_1 \Leftrightarrow T \cdot \vec{e}_1 = -(2,\ 0,\ \text{-}1)$ *

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

Nu saknar vi bara bilden av basvektor $\vec{e}_2$ som ges av $T \cdot \vec{e}_2$. Från likheterna vid * fås

$(1,\ 3,\ -1) = 2T \cdot \vec{e}_1 + T \cdot \vec{e}_2 \ \Leftrightarrow T \cdot \vec{e}_2 = (1,\ 3,\ -1) - 2T \cdot \vec{e}_1$ där från tidigare * fick vi fram

att $T \cdot \vec{e}_1 = -(2,\ 0,\ -1)$. Insättningen i ekvationen ger

$$T \cdot \vec{e}_2 = (1,\ 3,\ -1) - 2T \cdot \vec{e}_1 = (1,\ 3,\ -1) - 2 \cdot (-(2,\ 0,\ -1)) = \ldots = (5,\ 3,\ -3).$$

Summa summarum ges bilderna av basvektorer av

$T \cdot \vec{e}_1 = (-2,\ 0,\ 1)$ och $T \cdot \vec{e}_2 = (5,\ 3,\ -3)$.

Ty bilderna av respektive $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$ utgör kolonner i avbildningens matris ges matrisen av

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Svar: $T = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

THE END