

Facit  
2017-03-20

1. Låt

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm  $A^2$ , determinanten av  $A$  samt inversen av  $A$  om den finns.

Svar:  $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $\det A = -2$ ,  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 6 & 4 \\ 5 & -7 & -4 \end{bmatrix}$

2. Låt  $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$  och  $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ , och bestäm  $\vec{f}_3$  så att vektorn  $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$  får koordinaterna  $(1, -1, 2)$  i basen  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ . Visa även att vektorerna  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$  och  $\vec{f}_3$  är linjärt oberoende.

Svar:  $\vec{f}_3 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3$

3. Bestäm matrisen  $X$  så att  $B = B^{-1} - AXB^{-1}$ , där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Svar:  $X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -34 & -82 \\ -11 & -26 \end{bmatrix}$



4. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ -2x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Visa att systemet saknar lösning. Bestäm systemets minsta kvadrat-lösning.

Svar:  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Avgör vilka av punkterna  $P = (1, 1, 0)$ ,  $Q = (0, 1, 0)$  och  $R = (0, 0, 1)$  som ligger närmast linjen genom  $A = (1, 2, 3)$  och  $B = (1, 3, 4)$ .

Kommentar:

Linjen genom  $A$  och  $B$  har parameterform  $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t \cdot (0, 1, 1)$  och avståndet från  $P$ ,  $Q$  respektive  $R$  till linjen blir  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  respektive  $1$ .

Svar: Punkten  $R$  ligger närmast linjen.

6. Avbildningsmatrisen för spegling i ett visst plan genom origo ges av

$$A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ange avbildningsmatrisen för ortogonal projektion på samma plan.

Kommentar:

Planet består av alla egenvektorer med egenvärde  $\lambda = 1$  och blir  $x - 2y - 2z = 0$ .

Ortogonal projektion på planet kan nu beräknas 😊

Svar:  $A_{\text{projektion}} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$

