Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

Facit
2017-04-21

1. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Visa att A är inverterbar och beräkna sedan $\det\left(A^{-1}B\right)$.

Svar:

$\det A = -6 \neq 0 \;\Rightarrow$ A är inverterbar

$\det\left(A^{-1}B\right) = -\dfrac{1}{3}$

(OBS: $\det\left(A^{-1}B\right) =$ /multiplikationssatsen/ $= \det\left(A^{-1}\right)\cdot \det(B) = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \det(B)$)

2. Bestäm den punkt R på linjen genom punkterna $P = (1, 2, 3)$ och $Q = (2, 4, -1)$ som ligger närmast origo. Ange också avståndet från R till origo.

Svar:

$R = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad d = \dfrac{\sqrt{105}}{3}$ l.e.

3. De tre linjerna $l_1 : (x, y, z) = t\cdot(1, 0, 1)$, $l_2 : (x, y, z) = t\cdot(-1, 1, 0)$ och $l_3 : (x, y, z) = (2, 2, 4) + t\cdot(-2, 1, -1)$ avgränsar en triangel.
Bestäm triangelns hörnpunkter och dess area.

Svar:

l_1 skär l_2 i $(0,0,0)$
l_1 skär l_3 i $(6,0,6)$
l_2 skär l_3 i $(-6,6,0)$
$Area = 18\sqrt{3}$ a.e.

4. Bestäm egenvärden och egenvektorer till avbildningen F: $F: \Re^3 \to \Re^3$ med avbildningsmatris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Svar:

$\lambda = 1$ och motsvarande egenvektorer är $\vec{u}_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $t \in \Re$ och $t \neq 0$

$\lambda = 5$ och motsvarande egenvektorer är $\vec{u}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $t \in \Re$ och $t \neq 0$

$\lambda = -5$ och motsvarande egenvektorer är $\vec{u}_3 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $t \in \Re$ och $t \neq 0$

5. Bestäm avbildningsmatrisen A för en ortogonal projektion på planet som innehåller linjen $(x, y, z) = t \cdot (1, 1, -2)$ och punkten $Q = (2, 2, -1)$. Låt D vara kvadraten som spänns upp av vektorerna $(-1, 0, 1)$ och $(1, 0, 1)$. Under projektionen avbildas kvadraten på en parallellogram. Vad är dess area?

Svar:

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{parallel\log ram} = \sqrt{2} \text{ a.e.}$$

6. Dela upp vektorn $\vec{u}=(1, \ 3, \ 2)$ i två ortogonala komposanter $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ (dvs. $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2$), så att vektorn $\vec{u}_1$ är parallell med x_3 - axeln. Bestäm därefter en ON-bas $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ sådan att $\vec{f}_1$ är parallell med $\vec{u}_1$ och $\vec{f}_2$ är parallell med $\vec{u}_2$. Ange koordinaterna för vektorn $\vec{v}=(3, \ 2, \ 1)$ i den nya basen..

Svar:

$$\vec{u}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\ \vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\ \{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}\right\},\ \vec{v}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}\sqrt{10}\\9\\-7\end{pmatrix}_f$$