Lösningsskiss !

(1) Linjen L_1 har riktningsvektorn $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ parallell med Π.
Eftersom planet inte skärs av L_2 så måste också dess riktningsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vara parallell med Π.
Det innebär att Π:s normalvektorn är parallell med $\vec{u} \times \vec{v} = \ldots = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

↑
fylls av studenten

Låt då $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, då ges planets ekvation av

$$-x + 5y + 7z + D = 0 \text{ för något } D.$$

Vi vet att punkten $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ligger i planet och genom att stoppa dessa värden i planets ekvation ser vi att $D = 6$. Planets ekvation är alltså

$$-x + 5y + 7z + 6 = 0.$$

Svar: Π:s ekvation är $x - 5y - 7z - 6 = 0$

lösningsskiss!

② Vi skriver ekvationssystemet som

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a-2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ a \end{bmatrix}.$$

Där $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a-2 & 3 \end{bmatrix}$.

Vi vet att systemet är entydigt lösbart om $\det A \neq 0$.

$$\det A = 3 - a(a-2) = (3-a)(1+a) \neq 0.$$

Systemet har alltså lösning om $a \neq 3$, $a \neq -1$.

- $a = -1$ ger systemet

kompletteras av studenten

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \ldots$$ vilket saknas lösning.

- $a = 3$ ger systemet

–"–

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \ldots$$ med lösningar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Svar:
- för $a \neq 3$, $a \neq -1$ har systemet den entydiga lösningen
- för $a = -1$ saknas lösning
- för $a = 3$ har ekvationssystemet lösningarna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $t \in \mathbb{R}$.

Lösningsskiss!

(3)

a) Då $\vec{f}_1$ och $\vec{f}_2$ är ortogonala enhetsvektorer bildar de en ON-bas tillsammans med

$$\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2 = \ldots = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3\right).$$

↑ fylls av studenten

Alternativt kan man välja $\vec{f}_3 = -\vec{f}_1 \times \vec{f}_2$

Svar: $\vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3\right)$

b) Med valet $\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2$ har man

$$\vec{u} = \vec{f}_1 - \vec{f}_3 = \ldots = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3$$

↑ fylls av studenten

så koordinatmatrisen är

$$\vec{u}_{\underline{e}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ \sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}+1\end{pmatrix}$$

Svar: $\vec{u}_{\underline{e}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ \sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}+1\end{pmatrix}$

c) Eftersom $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 = \sqrt{2}\,\vec{f}_2$, är koordinatmatrisen

$$\vec{v}_{\underline{f}} = \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

Svar: $\vec{v}_{\underline{f}} = \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$

764G01

2017-08-17

Lösningsskiss!

(4) !!! Se kursboken (föreläsningsanteckningar) för en diskussion kring diagonalisering.

För att avgöra om matrisen A är diagonaliserbar bestämmer vi först egenvärden och egenvektorer. Determinantberäkning av den karaktäristiska ekvationen för matrisen ges av

(sekularekvationen till matris A)

$$\rightsquigarrow \det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \ldots \lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$$

$\uparrow$ fylls av studenten

Vi gissar först en rot $\lambda=1$. Polynomdivision visar sedan att detta är en dubbelrot, så att

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

Eftersom $\lambda_1=1$ och $\lambda_2=2$ är olika har vi säkert två linjärt oberoende egenvektorer. Huruvida matrisen är diagonaliserbar eller inte beror således på egenrummet svarande mot $\lambda_1=1$, om dimensionen är mindre än två så är matrisen inte diagonaliserbar.

För att undersöka detta löser vi ekvationssystemet

$$(A-1\cdot I)\vec{v}=\vec{0} \quad \Rightarrow \ldots$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{som ger}$$

$\uparrow$ fylls av studenten

bara $\vec{v}=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ där $t\in\mathbb{R}$ och $t\neq 0$. Alltså för $\lambda_1=1$ är dimensionen mindre än två så är matrisen inte diagonaliserbar.

(OBS! egenvektorerna bildar inte någon bas!!!)

<u>Svar</u>: Matrisen A är inte diagonaliserbar.

lösningsskiss!

(5)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi vill först diagonalisera matrisen. Egenvärden beräknas från dess karakteristiska polynom:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0 \iff \lambda = 3 \lor \lambda = 1$$

Egenvärden är då 1 och 3.
Nu behöver vi motsvarande egenvektorer:
$\lambda = 1$ ger oss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-1 & -2 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \ldots$$

fylls av studenten

vilket ger egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
På samma sätt ger $\lambda = 3$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-3 & -2 & 0 \\ 0 & 1-3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

egenvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Basbytesmatrisen T bestående av egenvektorer, dess invers, samt diagonalmatrisen D med motsvarande egenvärden ges av

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(OBS! alla lämpliga beräkningar görs av studenten)

Om $A = TDT^{-1}$ gäller det att $A^n = (TDT^{-1})^n = TD^nT^{-1}$ så

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 3^n & 1-3^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

fylls av studenten

svar: $A^n = \begin{bmatrix} 3^n & 1-3^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lösningsskiss!

(6)

Sätt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Om $\vec{v}$ är parallell med $\vec{u}$ så gäller att $F(\vec{v}) = \vec{v}$, medan om $\vec{v}$ är ortogonal mot $\vec{u}$ så gäller att $F(\vec{v}) = -\vec{v}$. Avbildningsmatrisen A har som kolumner $F(\vec{e}_1)$, $F(\vec{e}_2)$, $F(\vec{e}_3)$, så vi delar upp $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i komponenter ortogonala och parallella med $\vec{u}$ och använder ovanstående.

Projektionsformeln ger att $\vec{e}_{1//\vec{u}} = \frac{2}{5}\vec{u}$, $\vec{e}_{2//\vec{u}} = \frac{1}{5}\vec{u}$, $\vec{e}_{3//\vec{u}} = \vec{0}$ och vidare $\vec{e}_{1\perp\vec{u}} = \vec{e}_1 - \vec{e}_{1//\vec{u}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ och på samma sätt $\vec{e}_{2\perp\vec{u}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_{3\perp\vec{u}} = \vec{e}_3$.

Alltså blir

$$F(\vec{e}_1) = F\left(\vec{e}_{1//\vec{u}} + \vec{e}_{1\perp\vec{u}}\right) = F\left(\vec{e}_{1//\vec{u}}\right) + F\left(\vec{e}_{1\perp\vec{u}}\right) =$$

$$= \vec{e}_{1//\vec{u}} - \vec{e}_{1\perp\vec{u}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$ och på motsvarande sätt

$$F(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Medför att

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Svar:

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

OBS! tänk på att du kan alltid fort kontrollera svaret