

Facit 2018-08-15

1. En linje ges av skärningen mellan planen $x + y + 3z = -6$ och $2x + y - 2z - 10 = 0$.
Genom punkterna $(6, 0, 1)$ och $(-4, 4, -7)$ går en annan linje. Avgör om linjerna skär varandra. Beräkna i så fall skärningspunkten och vinkeln mellan linjerna. Bestäm i annat fall kortaste avståndet mellan linjerna.

Svar: Linjerna skär varandra i $P = (1, 2, -3)$. Vinkeln mellan linjerna är 45° .

2. Låt Π vara planet $x - 2y + 3z = 5$ och låt $\vec{u} = (0, -2, 1)$.

Dela upp $\vec{u} = \vec{u}_\perp + \vec{u}_\parallel$ där \vec{u}_\perp är ortogonal mot planet Π och \vec{u}_\parallel är parallell med planet.

Svar: $\vec{u}_\perp = \frac{1}{2}(1, -2, 3)$ och $\vec{u}_\parallel = -\frac{1}{2}(1, 2, 1)$.

3. Lös matrisekvationen $AXB^{-1} + A = I$, där I är enhetsmatrisen och

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Svar: $X = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

4. För vilka reella värden på a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ 2x + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

- a) exakt en lösning, vilken är denna lösning?
b) oändlig många lösningar, vilken är denna lösning?
c) ingen lösning

Svar:

- a) exakt en lösning då $a \neq \pm 1$, $x = \frac{1}{1+a}$, $y = -\frac{1}{1+a}$, $z = \frac{a-1}{2(1+a)}$.
b) oändlig många lösningar då $a = 1$, $x = 1+t$, $y = t$, $z = -\frac{1}{2} - t$ där $t \in \mathbb{R}$
c) ingen lösning då $a = -1$

5. Låt $\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3)$ och $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$.

- a) Finn en vektor \vec{f}_3 så att $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ bildar en ON-bas för rummet.
- b) Vilka koordinater har vektor $\vec{f}_1 - \vec{f}_3$ i basen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$?
- c) Vilka koordinater har vektor $\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ i basen $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$?

Svar:

a) $\vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3)$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ är koordinater för vektor $\vec{f}_1 - \vec{f}_3$ i basen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

c) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$ är koordinater för vektor $\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ i basen $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$

6. $A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ är matrisen för en linjär avbildning. Beskriv avbildningen geometriskt.

Svar: F är ortogonalprojektion i planet $x + 2y - z = 0$.

