Facit

2018-03-25 kl 8-13 OBS:korrekt datum:2019-03-25

1. Skärningslinjen mellan planen $x-2y+z-1=0$ och $2x-y+z-2=0$ går inte genom punkten $(4,\ -3,\ 0)$. Hur långt ifrån punkten ligger linjen?

Lösningsskiss:

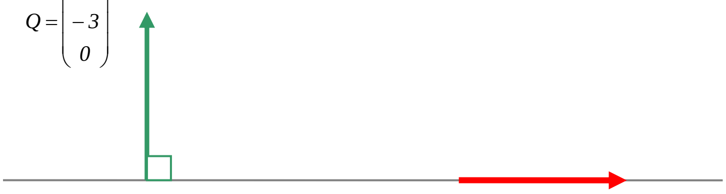
$$\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow_{ekv2-ekv1} \begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ x+\ y\qquad -1=0 \end{cases} \Leftrightarrow^{ekv1+2\cdot ekv2} \begin{cases} 3x\qquad +z-3=0 \\ x+y\qquad -1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-3x+3 \\ y=-x\ +1 \end{cases}$$

låt $x=t$ där $t\notin\Re$ som medför att $\begin{cases} z=-3t+3 \\ y=-t\ +1 \end{cases}$ alltså skärningslinjens ekvation ges av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t+1 \\ -3t+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$ (du kan snabbt kontrollera att linjen ligger i båda planen)

$Q=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$



$P=\begin{pmatrix} t \\ -t+1 \\ -3t+3 \end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{v}\ \Rightarrow \overrightarrow{PQ}\bullet\vec{v}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-t \\ -3-(-t+1) \\ 0-(-3t+3) \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4-t+(t-4)\cdot(-1)+(3t-3)\cdot(-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ldots(\,fyll\ \ i\,)\ldots \Leftrightarrow t=\frac{17}{11}$$

för $t=\frac{17}{11}$ blir $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix} 4-\frac{17}{11} \\ \frac{17}{11}-4 \\ 3\cdot\frac{17}{11}-3 \end{pmatrix}=\ldots=\frac{9}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (du kan snabbt kontrollera om)

och vidare $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\frac{9}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{9}{11}\sqrt{(3)^2+(-3)^2+2^2} = \frac{9\sqrt{22}}{11}$

svar: $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{9\sqrt{22}}{11}\,l.e.$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

2. Bestäm minstakvadratlösningen till

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \text{ er}$$

Ange ortogonalprojektionen av $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ på planet (genom origo) som spänns av $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösningsskiss:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \text{ i matrisform } A \cdot X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Normalekvationen $A^t \cdot A \cdot B = A^t \cdot B$ blir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Vidare blir

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$ vilket är ortogonala projektionen av högerledsvektorn i matrisform

B på kolonnrummet till A.

korrekt svar:(x,y)=(2/3,1/2)

Svar: Minstakvadratlösningen är $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, Ortogonalprojektionen av $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ är $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$.

3. $\vec{f}_1 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, $\vec{f}_2 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$ och $\vec{f}_3 = (\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.

a) Visa att $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ är en bas för rummet samt bestäm basbytesmatrisen P för basbytet.

b) Om $\vec{v}$ har koordinaterna $(3, 7, 2)$ i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, vad är dess koordinater i basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

c) Vilka koordinater har vektor $3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{f}_2$ i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$?

Lösningsskiss:

a) $\begin{bmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ där $P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

$\det P = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ är linjärt oberoende alltså $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ är en bas för rummet. (OBS! $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ och $\vec{f}_3$ spänner upp en parallellpiped med $V = |\det P| = |-1| = 1$ v.e.)

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\ 7\\ 2\end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}_e$ där $X_e = P \cdot Y_f \Rightarrow \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\ 7\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\ 5\\ 12\end{bmatrix}$ alltså

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\ 7\\ 2\end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix}10\\ 5\\ 12\end{pmatrix}_e \Leftrightarrow \vec{v} = 3\vec{f}_1 + 7\vec{f}_2 + 2\vec{f}_3 = 10\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3 \text{ (OBS! kontrollera)}$$

c)

$$\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{f}_2 = \left[\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3\right] = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\cdot(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) =$$

$$= 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}5\\ 2\\ 3\end{pmatrix}_e, \quad X_e = P \cdot Y_f \Leftrightarrow Y_f = P^{-1} \cdot X_e$$

Vi söker P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \text{ alltså } P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$Y_f = P^{-1} \cdot X_e \Rightarrow Y_f = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\ 2\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$$

alltså

$$\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{f}_2 = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_f = 4\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - 2\vec{f}_3$$

Svar:

a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}_e$

c) $\vec{u} = 4\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - 2\vec{f}_3$

4. För vilka reella värden på a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & -y & +(a+1)z & = 0 \\ 2x & -y & +az & = 3-a \\ x & +(a+2)y & +(2a+3)z & = 2a+1 \end{cases}$$

a) exakt en lösning ?
b) oändlig många lösningar, vilken är denna lösning?
c) ingen lösning

Lösningsskiss:

Ekvationssystemet i matrisform $AX = Y$ blir $\begin{bmatrix} 1 & -1 & (a+1) \\ 2 & -1 & a \\ 1 & (a+2) & (2a+3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3-a \\ 2a+1 \end{bmatrix}$

Ekvationssystemet har precis en lösning då $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & (a+1) \\ 2 & -1 & a \\ 1 & (a+2) & (2a+3) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \\ rad\,2 - 2\cdot rad\,1 \\ rad\,3 - rad\,2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & (a+1) \\ 0 & 1 & -(a+2) \\ 0 & (a+3) & (a+2) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ rad\,3 + rad\,2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & (a+1) \\ 0 & 1 & -(a+2) \\ 0 & (a+4) & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} utveckla \quad efter \quad kolonn \quad 1 \end{bmatrix} = 1\cdot(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -(a+2) \\ (a+4) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)(a+4)$$

$$\det A = 0 \Rightarrow (a+2)(a+4) = 0 \Leftrightarrow a+2=0 \quad eller \quad a+4=0 \Leftrightarrow a=-2 \quad eller \quad a=-4$$

Alltså har ekvationssystemet precis en lösning då $a \neq -2$ *och* $a \neq -4$.

Om $det\ A = 0$ har systemet antingen ingen lösning eller så har den oändligt många lösningar. För $a = -2$ blir den utökade matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow 0 = -8$$

Eftersom ekvation $0 = -8$ inte är uppfylld för några värden x, y och z saknar det givna ekvationssystemet lösning.

För $a = -4$ blir den utökade matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & -7 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \ x - z = 7 \Leftrightarrow x = 7 + z \\ \Rightarrow y + 2z = 7 \Leftrightarrow y = 7 - 2z \\ \end{array}$$

Välj $z = t,\ t \notin \Re$ då får vi $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 7 - 2t \\ z = t \end{cases}$ alltså $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Svar:

a) precis en lösning då $a \neq -2$ *och* $a \neq -4$.

b) oändligt många lösningar då $a = -4$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $t \notin \Re$

c) ingen lösning för $a = -2$

5. Bestäm matrisen för den linjära avbildning som definieras av att varje vektor $\vec{u}$ i rummet avbildas på sin ortogonala projektion på planet $x - y = 0$ och därefter speglas i origo.

Lösningsskiss:

Matrisen för projektionen är $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Matrisen för speglingen S i origo har matris $-I$, där I är enhetsmatrisen

$$S=-I=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$, så den sammansatta avbildningen har matris

$$S\cdot P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

Svar: $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

6. Rita och beskriv kurvan $Q(x_1,x_2)=6x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2=1$ så tydligt som möjligt. Bestäm även de punkter (x_1,x_2) på kurvan som ligger närmast origo.

Lösningsskiss:

Vi betraktar den kvadratiska formen

$Q(x,y)=6x^2+4xy+3y^2$

Dess matris är

$$S=\begin{bmatrix}6&2\\2&3\end{bmatrix}$$

Vars egenvärden är $\lambda_1=7,\lambda_2=2$. Vektorerna $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ och $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ är ortogonala,

men ej normerade, egenvektorer till S.

Normering ger

$$\vec{f_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ och } \vec{f_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$$

Genom transformationen

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix},$$

dvs.

$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}u+\dfrac{1}{\sqrt{5}}v\\[2mm] y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}u-\dfrac{2}{\sqrt{5}}v\end{cases}$$

Överförs alltså Q till den kanoniska formen $Q(u,v)=7u^2+2v^2$. (kan kontrollers genom att insättning av uttrycken för x och y i uttrycket för Q).

Kurvans ekvation i koordinatsystemet $\vec{f_1}\vec{f_2}$ är alltså

$$7u^2 + 2v^2 = 1$$

eller

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Detta är ekvationen för en ellips med halvaxlarna $\frac{1}{\sqrt{7}}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Storaxeln ligger i riktningen $\vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och lillaxeln i riktningen $\vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Observera nu att för $u = 0$ blir $\frac{v^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow v^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow v = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ och respektive för

$v = 0$ blir $\frac{u^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow u^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 \Leftrightarrow v = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Kortaste avståndet till origo är $\frac{1}{\sqrt{7}}$ vilket inträffar då $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs då

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

dvs.

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \end{cases} \text{ eller } \begin{matrix} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{7}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{7}} \end{matrix} \quad \text{alltså} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$

Svar: Kortaste avståndet till origo är $\frac{1}{\sqrt{7}}$ I.e. De punkter som ligger närmast origo

är $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$.