Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

Lösningsskiss/facit

2019-04-23 kl 8-13

1. Lös matrisekvationen $AXB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, där $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösningsskiss:

Med standarduträkning finner vi att $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ och $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$AXB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} \cdot AXB \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot B^{-1} \Leftrightarrow I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot B^{-1} \Leftrightarrow$$
$$X = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot B^{-1}$$

Alltså

$$X = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot B^{-1} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Svar: $X = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

2. Låt linjen l_1 vara skärningen mellan de två planen $x + y - z = 2$ och $x - y + z - 4 = 0$. Låt vidare π vara det plan som innehåller punkten $(0, 3, -2)$ och är ortogonal mot linjen $l_2 : (x, \ y, \ z) = (2t, \ 1+3t, \ 1-3t)$, $t \in \Re$. Visa att l_1 är parallell med π och bestäm avståndet mellan dem.

Lösningsskiss:

En ekvation för l_1 kan vi få gnom att lösa systemet

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Vi får $x = 3, y - z = -1$, så en parameterframställning ($y = t$ där $t \in \Re$) är

$$l_1 : (x, \ y, \ z) = (3, \ t, \ 1+t).$$

l_1:s riktningsvektor är $\vec{u} = (0, \ 1, \ 1)$ och normalvektor till π är $\vec{n} = (2, \ 3, \ -3)$.

Eftersom skalärprodukten $\vec{u} \bullet \vec{n} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) = 0$
är $\vec{u}$ och $\vec{n}$ ortogonala och därmed är l_1 parallell med planet π . En punkt på l_1 är $P = (3,\ 0,\ 1)$ och en punkt på π är $Q = (-0,\ 3,\ -2)$.

Avståndet d mellan l_1 och π är alltså lika med längden av ortogonala projektionen av $\overrightarrow{PQ}$ på $\vec{n}$.
Projektionssatsen ger då att

$$d = \left| \frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}} \vec{n} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{PQ} \bullet \vec{n} \right|}{|\vec{n}|^2} \cdot |\vec{n}| = \frac{\left| \overrightarrow{PQ} \bullet \vec{n} \right|}{|\vec{n}|} = \frac{|(-3) \cdot 2 + 3 \cdot 3 + (-3) \cdot (-3)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{6\sqrt{22}}{11}$$

Svar: Avståndet mellan l_1 och π är $\dfrac{6\sqrt{22}}{11}$ $l.e.$

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^3 & a^2 & a \\ 1 & a & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Där a är ett reellt tal. Beräkna $\det A$ och bestäm de värden på a för vilka A är inverterbar.

Lösningsskiss:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^3 & a^2 & a \\ 1 & a & 2 & 1 \end{bmatrix} = /\text{rad4-rad1}/ = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^3 & a^2 & a \\ 0 & a & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= /\text{utveckla efter första kolonnen}/ = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^3 & a^2 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = /\text{rad3-rad1}/ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^3 & a^2 & a \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= /\text{utveckla efter tredje raden}/ = (a-1) \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1) \cdot (a - a^2) = -a(a-1)^2.$$

Eftersom $\det A = 0$ om och endast om $a = 0$ eller $a = 1$, så är A inverterbar för alla andra värden på a.

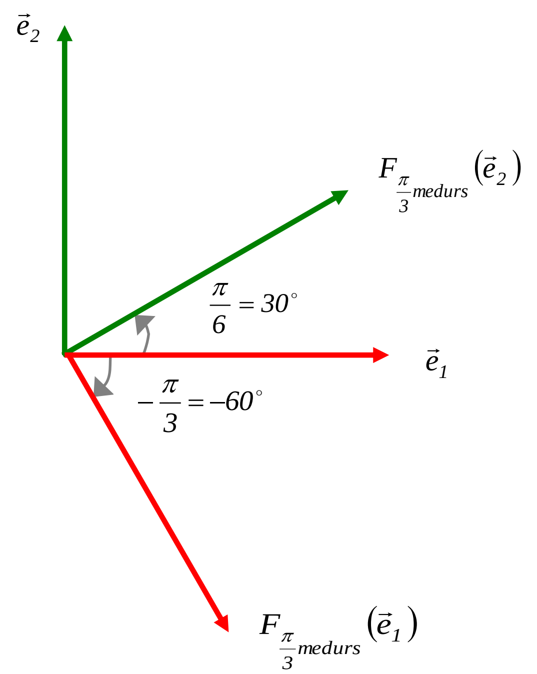
Svar: A är inverterbar för $a \neq 0$ och $a \neq 1$.

4. Bestäm avbildningsmatrisen för den sammansatta linjära avbildning i planet $(\Re^2)$ som först vrider vinkeln $\frac{\pi}{3}$ medurs och sedan speglar i x_2 -axeln.

Lösningsskiss :

OBS! utgå från en figur för respektive avbildning! Vad är bilden av respektive basvektor i planet :

- för vridning medurs $F_{\frac{\pi}{3}medurs}(\vec{e}_1)$ och $F_{\frac{\pi}{3}medurs}(\vec{e}_2)$ som ger

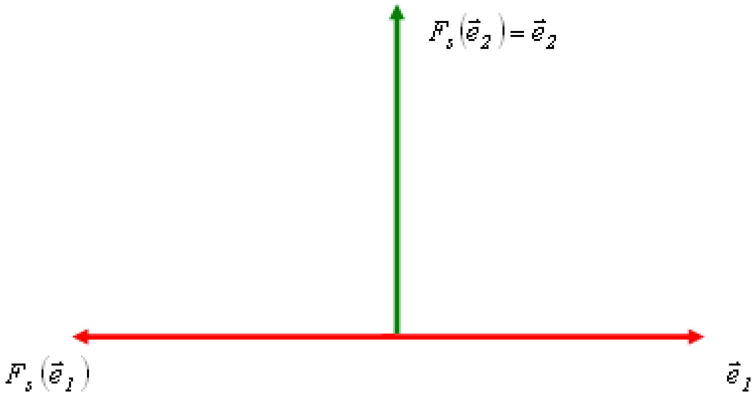


obs! du kan utgå från bilden och använda dig av rätvinkliga trianglar med diagonalerna med 1 l.e. eller ser direkt samband mellan koordinaterna och enhetscirkeln

Vi ser att $F_{\frac{\pi}{3}medurs}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \cdot cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \vec{e}_2 \cdot sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ och $F_{\frac{\pi}{3}medurs}(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \vec{e}_2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$A_{\frac{\pi}{3}medurs} = \left[F_{\frac{\pi}{3}medurs}(\vec{e}_1) \quad F_{\frac{\pi}{3}medurs}(\vec{e}_2) \right] = \begin{bmatrix} cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- för spegling i x_2-axeln $F_s(\vec{e}_1)$ och $F_s(\vec{e}_2)$



Vi ser att $F_s(\vec{e}_1)=-\vec{e}_1$ och $F_s(\vec{e}_2)=\vec{e}_2$

som ger $A_s=[F_s(\vec{e}_1)\quad F_s(\vec{e}_2)]=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Då blir matrisen för den sammansatta avbildningen A_{total} (observera ordningen)

$$A_{total}=A_s\cdot A_{\frac{\pi}{3}medurs}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Svar:

$$A_{total}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

5. Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Skriv $\vec{u}$ som en summa $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ så att $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ är ortogonala och så att $\vec{u}_1$ är parallell med skärningen mellan planen $x - 2y + z = 1, x + y - 2z = 3$.

Bestäm en ON-bas $\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$ så att dels $\overrightarrow{f_1}$ och $\vec{u}_1$ blir parallella, och dels $\overrightarrow{f_2}$ och $\vec{u}_2$ blir parallella. Vad blir koordinaterna för vektorn $[1 \quad 0 \quad 2]_{\underline{e}}^t$ i basen $\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$.

Lösningsskiss:

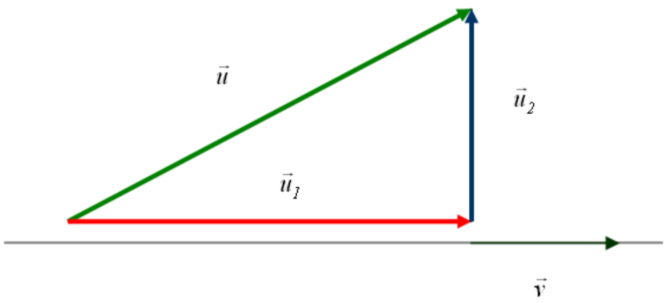
En ekvation för skärningen mellan planen kan vi få gnom att lösa systemet

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Vi får $x = \frac{5}{3} + y, y - z = \frac{2}{3}$, så en parameterframställning ($y = t$ där $t \in \Re$) är

$$l_1 : (x, \quad y, \quad z) = \left(\frac{5}{3} + t, \quad t, \quad -2/3 + t \right).$$

skärningslinjens riktningsvektor är $\vec{v} = (1, \quad 1, \quad 1)$.



Projektionssatsen ger då att $\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}_1 \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1 \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 \,//\, \vec{f}_1 \Rightarrow \vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 \,//\, \vec{f}_2 \Rightarrow \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ och}$$

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \,//\, \vec{f}_3 \Rightarrow 4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} // \vec{f}_3 \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} // \vec{f}_3 \Rightarrow \vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Basbytesmatrisen (transformationsmatrisen) P ges av $P = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$.

Sambandet $X_e = PY_f \Leftrightarrow Y_f = P^{-1}X_e \Leftrightarrow [P \text{ är ortogonal matris }] \Leftrightarrow Y_f = P^t X_e$ ger oss

$$Y_f = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{-2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}_f$$

Svar:

$$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[1 \quad 0 \quad 2]_{\underline{e}}^t = [\sqrt{3} \quad \sqrt{2} \quad 0]_{\underline{f}}^t$$

6. Om den linjära avbildningen F vet man att följande: $(1, 1, 1)$ är en egenvektor med egenvärdet 2 och vektorerna $(1, 0, 1)$ och $(-1, 0, 1)$ är bilder av varandra. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till F. Bestäm sedan den matris som svarar mot den linjära avbildning F med hjälp av funna egenvärden och egenvektorer.

Lösningsskiss:

Vi vet att $F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ och $F\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Vidare ger linearitesegenskaperna:

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$ alltså

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right) = 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$ som medför att

$\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ är en egenvektor med egenvärdet 1.

och

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) - F\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$ alltså

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow F\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow F\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right) = -1\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$ som medför att

$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ är en egenvektor med egenvärdet (-1).

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Den matris som svarar mot den linjära avbildning F med hjälp av funna egenvärden och egenvektorer blir då

$$A = PA_f P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar:

Egenvärdena är: 2 och $1, \ -1$.

Motsvarande egenvektorer blir $t(1, 0, 0)$, $t(0, 0, 1)$ respektive $t(1, 1, 1)$, $t \neq 0$.

Där $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.