Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

**Kurskod: 764G01**
Provkod: TEN1

# Facit

## 2019-08-23 kl 8-13

1. Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm alla vektorer som har längd 3 och som är ortogonala mot $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

"Minimalt" lösningsförslag:

En vektor $\vec{w}$ som uppfyller villkoren måste till att börja med vara parallell med $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, det vill säga parallell med $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Eftersom denna senare vektor har längd $\sqrt{3}$, medan $\vec{w}$ skall ha längd $3$, måste $\vec{w} = \pm\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Svar: $\vec{w} = \pm\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. De fyra planen $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ och $\Pi_4$ är givna av följande ekvationer:

$$\Pi_1: \quad x + 2y + 3z = 6$$

$$\Pi_2: \quad 2x - y + z = -3$$

$$\Pi_3: \quad 4x + 3z = 2$$

$$\Pi_4: \quad x - y - 2z = -8$$

Planen $\Pi_1, \Pi_2$ och $\Pi_3$ skär varandra i en punkt. Bestäm det kortaste avståndet från denna punkt till planet $\Pi_4$.

Svar: Skärningspunktens koordinater är $(2,\ 5,\ -2)$. Sökta avståndet är $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ l.e.

3. Låt $\underline{e} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ vara en bas i ett linjärt rum L. Vi inför en ny bas $\underline{f} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ i L definierad genom sambandet

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = 4\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_2} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_3} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

Vektorn $\vec{u} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\,\overrightarrow{e_3}$.

Bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{u}$ i basen $\underline{f} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$.

Svar: $\vec{u} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{f_1} - 2 \cdot \overrightarrow{f_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{f_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$

4. Bestäm den vridningsmatris (vridning omkring origo) som överför vektorn $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ på vektorn $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Svar: $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

5. Beräkna matrisen till den ortogonala projektionen P på planet som går igenom punkterna $(2, 0, -2), (2, 1, -3)$ och $(1, 2, -3)$. Låt D vara kvadraten som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 0)$ och $(0, 1, 0)$. Under projektionen avbildas kvadraten på en parallellogram. Vad är dess area?

Svar: Den sökta matrisen är $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ och parallellogrammens area är $\frac{1}{\sqrt{3}}$ a.e.

6. Bestäm egenvärden och tillhörande egenvektorer till den linjära avbildningen $F : \Re^3 \to \Re^3$ som i standardbasen representeras av

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ge även en tydlig geometrisk tolkning av avbildningen.

"Minimalt" lösningsförslag:

Avbildningen är symmetrisk och följaktligen diagonaliserbar. Den har egenvärdena

$-1, 1, 1$ och egenrummet som hör till egenvärdet -1 är spänt av $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Följaktligen

(eftersom avbildningen är symmetrisk) är egenrummet som hör till 1 det ortogonala

komplementet, dvs planet $\Pi$ genom origo med normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. I en bas av egenvektorer har

avbildningen matris $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ så avbildningen är spegling i planet $\Pi$.

Svar: Avbildningen är en spegling i planet $\Pi : x + y + z = 0$