Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

Facit
2020-03-24

		Uppgift 1				Uppgift 2				Uppgift 3	Uppgift 5	
Uppgiftsnummer	a_{11}	a_{32}	b_{31}	a	b	c	d	e	f	Alternativ	c_{12}	c_{32}
1	1	1	2	1	4	1	4	1	1	Alternativ 1	-4	-4

1. Bestäm en minstakvadratlösning till ekvationssystemet $AX = B$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Svar: $X = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Bestäm alla vektorer av längd $9\sqrt{2}$ som bildar rät vinkel med vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

och 60 graders vinkeln med vektorn $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Minimal lösningsskiss:

Om $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ är en sådan vektor som efterfrågas i uppgiften, så ska vi alltså ha

$$\vec{u} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = x + 4y + z = 0 \text{ och } \vec{u} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |\vec{u}| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \cos 60^\circ.$$

Men $\vec{u}$ har längd $9\sqrt{2}$, så vi får

$$\vec{u} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |\vec{u}| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow 4x + y + z = 9\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4x + y + z = 27$$

Lösningarna till ekvationssystemet

$\begin{cases} x+4y+z=0 \\ 4x+y+z=27 \end{cases}$ kan skrivas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t-9 \\ -5t+36 \end{pmatrix}$. Eftersom $|\vec{u}| = 9\sqrt{2}$, så får vi

$$x^2+y^2+z^2 = t^2+(t-9)^2+(-5t+36)^2 = 162$$

vilket efter förenklig ger $t^2-14t+45=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow t=5$ eller $t=9$, så de sökta vektorerna är $\vec{u} = (5, \quad -4 \quad 11)$ och $\vec{u} = (9, \quad 0 \quad -9)$.

Svar: De sökta vektorerna är $\vec{u} = (5, \quad -4 \quad 11)$ och $\vec{u} = (9, \quad 0 \quad -9)$.

3. Låt För vilka reella värden på β har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + (\beta+1)x_2 + \beta x_3 = 1 \\ (\beta-1)x_1 - x_2 + (\beta^2-\beta)x_3 = -1 \end{cases}$$

a) exakt en lösning
b) oändlig många lösningar
c) ingen lösning

Ange lösningen i de fall systemet har mer än en lösning.

Svar:

a. exakt en lösning om $\beta \neq 0$ och $\beta \neq 1$

b. oändlig många lösningar om $\beta = 0$, ger lösningen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ -2 \end{pmatrix}$ där $t \in \Re$

c. ingen lösning om $\beta = 1$

4. Betrakta vektorerna $\vec{f_1} = (0, \quad 1, \quad k)$, $\vec{f_2} = \left(\frac{3}{5}, \quad 0, \quad \frac{4}{5}\right)$ och $\vec{f_3} = \left(l, \quad m, \quad \frac{3}{5}\right)$, där $k, l, m \in \Re$.

a) När bildar $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ en bas för rummet?

b) Bestäm (alla möjliga) k, l, m så att $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ bildar en ON-bas. Ordna vektorerna så att basen dessutom blir positivt orienterad.

Minimal lösningsskiss till a)

$$det(A)=\begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{5} & l \\ 1 & 0 & m \\ k & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix}=\ldots=\frac{1}{25}(15\cdot k\cdot m+20\cdot l-9)$$

Svar a): Vektorerna bildar en bas då $det(A)\neq 0$, dvs då $\frac{1}{25}(15\cdot k\cdot m+20\cdot l-9)\neq 0$.

Minimal lösningsskiss till b)

$\overrightarrow{f_1}\bullet\overrightarrow{f_2}=0$ ger… $\frac{4}{5}k=0\Leftrightarrow k=0$

$\overrightarrow{f_1}\bullet\overrightarrow{f_3}=0$ ger … $m=0$

$\overrightarrow{f_2}\bullet\overrightarrow{f_3}=0$ ger … $\frac{3}{5}\left(l+\frac{4}{5}\right)=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow l=-\frac{4}{5}$.

Därmed har vi att $\overrightarrow{f_1}=(0,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{f_2}=\left(\frac{3}{5},\ 0,\ \frac{4}{5}\right)$ och $\overrightarrow{f_3}=\left(-\frac{4}{5},\ 0,\ \frac{3}{5}\right)$, och man verifierar att $\left|\overrightarrow{f_i}\right|=1$ för $i=1,2,3$ så basen är en ON-bas.

Med dessa värden på k,l,m får vi $det\left[\overrightarrow{f_1}\quad\overrightarrow{f_2}\quad\overrightarrow{f_3}\right]=-1$, så basen är negativt orienterad.

Byter vi plats på två vektorer får vi en positivt orienterad bas, exempelvis kan vi ta basen $\left\{\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_3}\right\}$.

Svar b):

För $k=0$, $l=-\frac{4}{5}$ och $m=0$ bildar

$\left\{\left(\frac{3}{5},\ 0,\ \frac{4}{5}\right),(0,\ 1,\ 0),\left(-\frac{4}{5},\ 0,\ \frac{3}{5}\right)\right\}$ en positivt orienterad bas.

5. Låt C vara matrisen $C=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 2 & -4 & -2\end{bmatrix}$

a) Bestäm alla egenvärden till C.

b) För varje egenvärde bestäm egenvektor.

c) Är C diagonaliserbar? Motivera ditt svar.

Svar:

a) Egenvärden till C är $\lambda=0$, $\lambda=-4$.

b) Fallet $\lambda=0$ ger egenvektor $t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, där $t\neq 0$. Fallet $\lambda=-4$ ger egenvektor $t\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$,

där $t\neq 0$.

c) Eftersom vi bara har hittat två linjärt oberoende egenvektorer, så kan C inte diagonaliserbar.

6. Låt $S_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$ vara avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som ges av spegling i planet $x_1+x_2+x_3=0$ och S_2 vara avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som ges av spegling i planet $x_1-x_2+x_3=0$.

a) Bestäm matrisen S för den sammansatta avbildningen, som ges av att först spegla i $x_1+x_2+x_3=0$ och sedan spegla i $x_1-x_2+x_3=0$.

b) S är avbildningsmatrisen för rotationen. Bestäm rotationsaxeln.

Svar:

a) $$S=S_2\cdot S_1=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 4 & -8\\ -4 & -7 & -4\\ -8 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

b) Avbildningen har rotationsaxeln $t\cdot(-1,\ \ 0,\ \ 1)$.