Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

Facit
2020-04-24

1. Låt *L* vara skärningslinjen mellan planen $1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z=1$ och $x+2y+3z=6$, och låt *P* vara punkten $(1,3,3)$.

   a) Bestäm den punkt *Q* på *L* som ligger närmast *P*.

   b) Bestäm ekvationen för det plan π som innehåller *L* och som är sådant att den punkt i π som är närmast *P* är punkten *Q* från deluppgift (a).(Tips! Rita figur!)

   (obs! $a=1, b=1, c=1, d=1$ och punkt $P=(1,3,3)$ individuell data)

Lösningsskiss a):

Löser vi ekvationssystemet med planets ekvationer får vi att *L* ges av $(x,y,z)=(-4,5,0)+t\cdot(1,-2,1)$, för $t\in\Re$. Alltså är $R=(-4,5,0)$ en punkt på *L* och $\vec{v}=(1,-2,1)$ dess riktningsvektor. Vi har $\overrightarrow{RP}=(5,-2,3)$. Om Q är den punkt på *L* som är närmast *P* så är

$$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{RP}_{//\vec{v}}=\frac{\overrightarrow{RP}\bullet\vec{v}}{\vec{v}\bullet\vec{v}}\vec{v}=\ldots=(2,-4,2)$$

så $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RQ}=(-2,1,2)$.

Svar: $Q=(-2,1,2)$

Lösningsskiss b):

Om Q är den punkt på *L* som är närmast *P* så måste $\overrightarrow{QP}=(3,2,1)$ vara en normalvektor till planet. Dess ekvation är därmed
$3(x-(-4))+2(y-5)+1\cdot(z-0)=0 \Leftrightarrow 3x+2y+z+2=0$

Svar: π:s ekvation är $3x+2y+z+2=0$

2. Låt $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

a) Ta fram med hjälp av lämpliga beräkningar någon matris B, sådan att $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

b) Beräkna BA.

c) Är A en inverterbar matris (enligt den definition av inverterbara matriser som används i kursen)? Motivera ditt svar väl, men kortfattat!

Svar: a) $B=\begin{bmatrix}-3e & -3f-1\\ -e+1 & -f+1\\ e & f\end{bmatrix}$, till exempel för $f=1$ och $e=0$ blir $B=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

b) $BA=\begin{bmatrix}-4 & 0 & -12\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$

c) Nej, A är inte en kvadratisk matris.

"Minimalt" lösningsförslag:

a) Allmänt fås att B:s utseende är till exempel följande $B=\begin{bmatrix}-3e & -3f-1\\ -e+1 & -f+1\\ e & f\end{bmatrix}$

för till exempel för $f=1$ och $e=0$ blir $B=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Svar a)

till exempel $B=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Svar b) till exempel $BA=\begin{bmatrix}-4 & 0 & -12\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ då $B=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Svar c) Nej, A är inte en kvadratisk matris.

3. I en given godtycklig triangel ΔABC, låt *M* vara mittpunkt på *AB*, punkten *N* på sidan *BC* uppfyller $\left|\overrightarrow{BN}\right| = 2 \cdot \left|\overrightarrow{NC}\right|$, och *P* är mittpunkt på *AC*. Betrakta baserna $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ och $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\} = \{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\}$.

   a) Uttryck vektorerna $\vec{g}_1$ och $\vec{g}_2$ i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$.

   b) Låt $\vec{v}$ vara vektorn med koordinaterna $(1,2)$ i basen $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$. Bestäm koordinaterna för $\vec{v}$ i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$.

   (obs! $m = 2$ och $(n,k) = (1,2)$ individuell data)

Svar: a) $\vec{g}_1 = 2 \cdot \vec{f}_1 - \frac{8}{3} \cdot \vec{f}_2$ och $\vec{g}_2 == 2 \cdot \vec{f}_1 - \frac{2}{3} \cdot \vec{f}_2$

c) Om vektorn $\vec{v}$ har koordinatmatrisen $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ så har $\vec{v}$ har koordinatmatrisen $Y = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$.

4. Låt $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ vara linjärt oberoende vektorer i ett givet vektorrum V. Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4$, $\vec{u}_2 = 2\vec{a}_1 + 3 \cdot \vec{a}_2 - \vec{a}_3 - \vec{a}_4$, $\vec{u}_3 = 2\vec{a}_2 + (-4) \cdot \vec{a}_3 + \vec{a}_4$ och $\vec{u}_4 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 - \vec{a}_4$ är linjärt oberoende.

(obs! $x_1 = 3$ och $x_2 = -4$ individuell data)

Lösningsskiss:

Teori " klick" först

Definition
Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ vara en uppsättning vektorer i $\Re^n$. Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ sägs vara <u>linjärt oberoende</u> om $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$ endast gäller om $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$.

Anta att

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 + \lambda_4\vec{u}_4 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4) + \lambda_2(2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - \vec{a}_3 - \vec{a}_4) +$$
$$+ \lambda_3(2\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3 + \vec{a}_4) + \lambda_4(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 - \vec{a}_4) = \vec{0} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}_1(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4) + \vec{a}_2(2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4) + \vec{a}_3(-\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 - \lambda_4) + \vec{a}_4(2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4) = \vec{0}$$

Eftersom $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ är linjärt oberoende vektorer är detta ekvivalent med att $\lambda_i, i = 1,...4,$ uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \text{fortsätt du...}$$

...

För att se om detta ekvationssystem har icketriviala lösningar räcker det att räkna ut determinanten för 4×4 koefficientmatrisen. Med hjälp av radmanipulationer får man att den är 13, alltså skild från noll. Därmed har systemet bara lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, och alltså är vektorerna $\vec{v}_i, i = 1,...4,$ linjärt oberoende.

Svar:
Vektorerna $\vec{u}_i, i = 1,...4,$ är linjärt oberoende ty $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 + \lambda_4\vec{u}_4 = \vec{0}$ endast om $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

5. $R = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ är avbildningsmatrisen för rotationen.

a) Bestäm rotationsaxeln.

b) Låt F vara speglingen på linjen som går genom origo och har riktningen parallellt med rotationsaxeln för R. Beräkna F:s avbildningsmatris A.

Lösningsskiss a):

Bilden av en vektor parallell med rotationsaxeln vid rotation kring den bör vara sig själv, alltså man ska lösa ekvationen $R \cdot \vec{r} = \vec{r} \Rightarrow \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \vec{r} = \vec{r}$ där $\vec{r}$ är beteckningen här för rotationsaxelns riktning.

Svar: a) Avbildningen har rotationsaxeln $t \cdot (-2, \quad 1, \quad -2)$.

b) $R = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -4 & 8 \\ -4 & -7 & -4 \\ 8 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

6. En symmetrisk avbildning *G* av <u>rummet</u> har egenvärdet 2. Vidare avbildas varje vektor på planet $x_1 - x_3 = 0$ på sig själv. Bestäm matrisen för *G*.

   (obs! $\lambda = 2$ och $\pi : x_1 - x_3 = 0$ individuell data)

Svar: $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(OBS! i denna uppgift bör du bland annat hänvisa till och ha mycket nytta av följande sats :

Antag att S är en symmetrisk matris av typ $n \times n$ och att $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är två egenvektorer med motsvarande egenvärden λ och μ, $\lambda \neq \mu$. Då är $\vec{u}$ och $\vec{v}$ ortogonala.)