Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

Lösningsskiss/facit i Linjär algebra
2020-08-24

1. Svar: $\vec{u}$ och $\vec{w}$ är egenvektorer med egenvärde 2 respektive -4, $\vec{v}$ är ej en egenvektor.

2. Lösningsskiss:

Eftersom $\begin{vmatrix} 2 & (1-b) & 2 \\ (2+b) & -1 & 1 \\ (2+2b) & -1 & (1+b) \end{vmatrix} = b(b^2-1)$ och

$b(b^2-1)=0 \Leftrightarrow b=0$ eller $b=\pm 1$ så betyder det att för $b \neq 0$ samt $b \neq \pm 1$ har systemet en entydig lösning. För det övriga tre b har systemet inga lösningar alls, vilket kan ses genom Gausseliminationsmetod.

3. Lösningsskiss:

Linjen kan beskrivas $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \vec{v}, t \in \Re$, där $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. För ett allmänt $\vec{u}$ (rita figur!) ges

projektionen av $\vec{u}$ på linjen av projektionsformeln, dvs $\vec{u}_{//\vec{v}} = F(\vec{u}) = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}$. Vidare ges $F:$s avbildningsmatris A av $(F(\vec{e}_1), F(\vec{e}_2), F(\vec{e}_3))$, dvs A:s kolonner består av i tur och ordning $F(\vec{e}_i), i = 1,2,3$, dvs $\vec{e}_{i//\vec{v}} = F(\vec{e}_i) = \dfrac{\vec{e}_i \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}$, $i = 1,2,3$. Dessa vektorer blir

$\vec{e}_{1//\vec{v}} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{e}_{2//\vec{v}} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{e}_{3//\vec{v}} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$, vilket innebär att

$A = \dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$. En lämplig kontroll kan vara att $F(\vec{v}) = \vec{v}$. Vi finner att

$$F(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \vec{v}.$$

4. Lösningsskiss:

$$\begin{cases} XA + YB = I \\ X + Y = 2I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} XA + YB = I & (ekv1) \\ XA + YA = 2IA & (ekv2) \end{cases}$$

Om vi nu subtraherar $(ekv2)$ från $(ekv1)$ fås

$(ekv2)$ $XA + YB - (XA + YA) = I - 2IA \Leftrightarrow YB - YA = I - 2A \Leftrightarrow Y(B - A) = I - 2A$

Eftersom $(B - A)$ är inverterbar, erhålls därför

$$Y = (I - 2A)(B - A)^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Ur den andra ekvationen fås nu $X + Y = 2I \Leftrightarrow X = 2I - Y$

$$X = 2I - Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Lösningsskiss:

Vi vet att en vridning φ (moturs) i planet har avbildningsmatris $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

För att bestämma $F:s$ avbildningsmatris söker vi $F(\vec{e}_1)$ och $F(\vec{e}_2)$.. Vi finner

$F(\vec{e}_1) = G(H(\vec{e}_1)) = G(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ samt $F(\vec{e}_2) = G(H(\vec{e}_2)) = G(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alltså blir avbildningsmatrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ vilket beskriver en rotation ett kvarts varv medurs (och eventuellt ett antal hela varv dessutom).

6. Lösningsskiss:

Att $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ är linjärt oberoende är enligt definitionen detsamma som att $\lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 + \lambda_3\vec{w}_3 = 0$ bara skall ha den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Denna ekvation svarar mot ekvationssystem i λ_i :na, om man uttrycker vektorerna i $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. Löser man detta med Gausselimination ser man att $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ är linjärt oberoende.

(Man kan också tydligt argumentera så här: Uttryckt i $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ är koordinaterna för $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ $(1,1,1)$, $(1,2,4)$, $(1,3,9)$ (OBS. formuleringen av kommentaren här är super viktigt, det ska framgå att man förstår att $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ är inte givna i en annan bas än just $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$) och det räcker att visa att dessa tre vektorer är linjärt oberoende, vilket är ekvivalent med att matrisen med dem som kolonvektorer har determinant skild från noll. Denna determinant är 2.)

För att bestämma koordinaterna för vektorn vet vi att följande samband gäller :

$$\vec{u}_1 + 10\vec{u}_2 + 100\vec{u}_3 = x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + x_3\vec{w}_3 \text{ i basen } \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\},$$

uttryckt i $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ ska man lösa nu ekvationssystemet

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 100 \end{cases}$$

som har lösningen $\{x_1, x_2, x_3\} = \{28, -63, 36\}$.