Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

Facit
2021-03-24

1.

Svar: $y = 3x + 1$

Lösningsskiss:

Normalekvationen $A^tA\vec{x} = A^t\vec{b}$ ger då

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$5\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 36 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad /:5$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 36 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18-15 \\ -54+55 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ger då} \quad y = 3x + 1$$

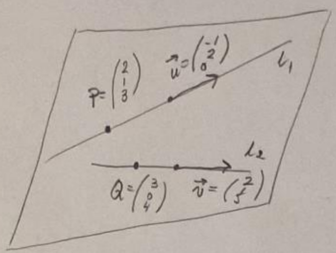
Svar: $y = 3x + 1$

kontroll: $(A\vec{x}) \cdot (A\vec{x} - \vec{b}) = 0$

2.

Svar: $d = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ l.e.

Lösningsskiss:



• OBS: $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$, ty $\vec{u} \neq k\cdot\vec{v}$

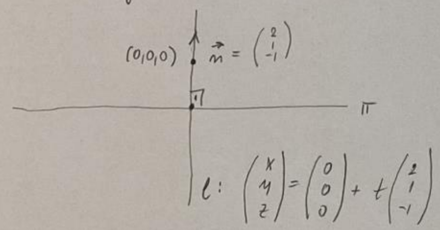
• $\vec{n} \parallel \vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\5\\-5\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

• tag $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

• π:s ekvation blir då $2x + y - z + D = 0$

• t.ex. $P = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ bör uppfylla linjens ekvation, alltså $4 + 1 - 3 + D = 0 \Leftrightarrow D = -2$

• π:s ekvation ges av $2x + y - z - 2 = 0$

•


OBS! $O = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ uppfyller ej π:s ekvation, alltså ligger ej i planet

• $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$, vi söker det t som krävs för att komma från $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ till skärningspunkten mellan linjen och planet

• $4t + t + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

• $d = \left|t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{(2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Svar: $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$ l.e. (eller $d = \sqrt{\frac{2}{3}}$ l.e.)

3.

Svar: a) t.ex. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (OBS: enklaste sättet att komplettera är att ta $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$)

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\vec{u} + 3\vec{e}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Lösningsskiss:

Notera först att $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är ortogonala. Enklaste sättet att komplettera dem till en högerorienterad bas är då att ta som den tredje basvektorn deras kryssprodukt (vektorprodukt). Vi får alltså:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Basbytesmatrisen från $\underline{e}$ till basen $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ får vi om vi skriver de nya basvektorernas koordinater i den gamla basen som kolonner:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{OBS!} \quad [\vec{u} \;\; \vec{v} \;\; \vec{w}] = \underbrace{[\vec{e}_1 \;\; \vec{e}_2 \;\; \vec{e}_3]}_{\underline{e}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \right)$$

c) Naturligtvis

$$\vec{u} + 3\vec{e}_2 = (\vec{e}_1 - \vec{e}_3) + 3\vec{e}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

så att $\vec{u} + 3\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{e}}$. För att skriva $\vec{e}_2$ i den nya basen $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ kan vi (föreläsning om basbyte) använda oss av sambandet $X_e = PX_f \Leftrightarrow X_f = P^{-1}X_e$ där $X_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ medan X_f är en kolonnvektor innehållande sökta koordinater av $\vec{e}_2$ i den nya basen. Vi får då

$$X_f = P^{-1} \cdot X_e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alltså

$$\vec{u} + 3\vec{e}_2 = \vec{u} + 3 \cdot \frac{1}{3} (0 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w},$$

som ger att i den nya basen kan vektorn $(\vec{u} + 3\vec{e}_2)$ skrivas som $\vec{u} + 3\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}}$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

4.

Svar: $A_f = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

Lösningsskiss:

Den sökta avbildningsmatrisen ges av formeln $A_f = P^{-1} A_e P$ där

P är basbytesmatrisen från basen $\underline{e}$ till $\underline{f}$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notera att den nya basen $\underline{f}$ är också ON så att matrisen P är ortogonal, vilket betyder att $P^{-1} = P^t$. Vi får alltså

$$A_f = P^{-1} A_e P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

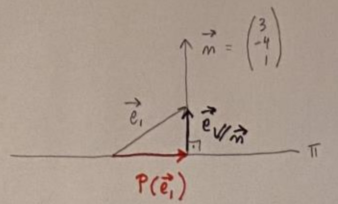
5.

Svar: a) $A = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 17 & 12 & -3 \\ 12 & 10 & 4 \\ -3 & 4 & 25 \end{bmatrix}$

b) $P(\vec{u}) = A\vec{u} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (OBS: vektorn $\vec{u}$ ligger i Π, man har alltså svaret innan man börjar räkna)

Lösningsskiss:

a)



$$P(\vec{e}_1) + \vec{e}_{1//\vec{m}} = \vec{e}_1$$

$$P(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_{1//\vec{m}} \quad \text{där} \quad \vec{e}_{1//\vec{m}} = \frac{\vec{e}_1 \bullet \vec{m}}{\vec{m} \bullet \vec{n}}\vec{n} \quad \text{enligt projektionssatsen}$$

Alltså $P(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \frac{\vec{e}_1 \bullet \vec{n}}{\vec{m} \bullet \vec{n}}\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{26}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 26-9 \\ 0+12 \\ 0-3 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

På motsvarande sätt fås

$$P(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 - \frac{\vec{e}_2 \bullet \vec{n}}{\vec{m} \bullet \vec{n}}\vec{n} = \ldots = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

och $P(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 - \vec{e}_{3//\vec{m}} = \ldots = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 25 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} P(\vec{e}_1) & P(\vec{e}_2) & P(\vec{e}_3) \end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 17 & 12 & -3 \\ 12 & 10 & 4 \\ -3 & 4 & 25 \end{bmatrix}$$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, där $\vec{u} \bullet \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{u}$ ligger i Π $(\vec{u} // \Pi)$

alltså bör $P(\vec{u}) = A\vec{u} = \vec{u}$, (OBS! ortogonal projektion P på Π av alla vektorer som är $// \Pi$ är "samma" vektorer.)

• OBS! $\vec{u}$ är egenvektor med egenvärde $\lambda = 1$.

Detta kan även beräknas med hjälp av resultat i a):

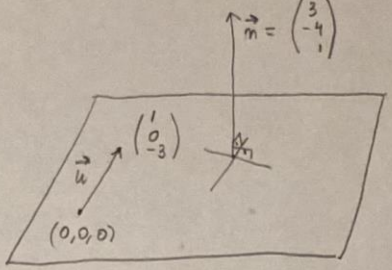
$$P(\vec{u}) = A\vec{u} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 17 & 12 & -3 \\ 12 & 10 & 4 \\ -3 & 4 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 104 \\ 78 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \vec{u}$$

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

…eller…

eller …



$\pi: \quad 3x - 4y + z = 0$

Välj en ny, "smart" bas som passar geometrin

Om den nya basen är ON-bas, blir $P^{-1} = P^t$ (P är basbytesmatris)

och $A_e = PA_fP^t$ (där A_f är avbildningsmatrisen i den nya basen)

tag:
- $\vec{f}_1 \parallel \vec{m}$, där $P(\vec{f}_1) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{f}_1$
- $\vec{f}_2 \parallel \vec{u}$, där $P(\vec{f}_2) = \vec{f}_2 = 1 \cdot \vec{f}_2$
- $\vec{f}_3 \parallel \vec{m} \times \vec{u}$, där $P(\vec{f}_3) = \vec{f}_3 = 1 \cdot \vec{f}_3$

ger $A_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

för ON-bas blir
$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

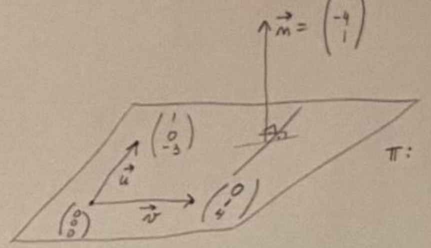
$$A_e = PA_fP^t = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{26} & 1/\sqrt{10} & 6/\sqrt{65} \\ -4/\sqrt{26} & 0 & 5/\sqrt{65} \\ 1/\sqrt{26} & -3/\sqrt{10} & 2/\sqrt{65} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{26} & -4/\sqrt{26} & 1/\sqrt{26} \\ 1/\sqrt{10} & 0 & -3/\sqrt{10} \\ 6/\sqrt{65} & 5/\sqrt{65} & 2/\sqrt{65} \end{bmatrix} =$$

$$= \dots = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 17 & 12 & -3 \\ 12 & 10 & 4 \\ -3 & 4 & 25 \end{bmatrix}$$

oki doki

…eller…

eller … välj en "smart" bas som passar geometrin, ej ON-bas utan



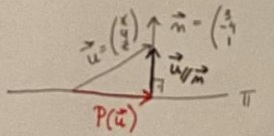
$\pi: \ 3x - 4y + z = 0$

- $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$
- tag $\vec{f}_1 = \vec{m} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P(\vec{f}_1) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{f}_1$
  $\vec{f}_2 = \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $P(\vec{f}_2) = \vec{f}_2 = 1 \cdot \vec{f}_2$
  $\vec{f}_3 = \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P(\vec{f}_3) = \vec{f}_3 = 1 \cdot \vec{f}_3$

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_e = P A_f P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{26} & \frac{-2}{13} & \frac{1}{26} \\ \frac{17}{26} & \frac{6}{13} & \frac{-3}{26} \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix} = \dots = \underbrace{\frac{1}{26} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -3 \\ 12 & 10 & 4 \\ -3 & 4 & 25 \end{bmatrix}}_{\text{oki doki}}$$

… eller …



$P(\vec{u}) + \vec{u}_{/\!/\vec{m}} = \vec{u} \iff P(\vec{u}) = \vec{u} - \vec{u}_{/\!/\vec{n}}$

Alltså med hjälp av projektionsatsen $\vec{u}_{/\!/\vec{n}} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\vec{m} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \left(\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}|^2} \vec{n} \right)$ får vi:

$$P(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{3x - 4y + z}{26} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 26x - 3(3x - 4y + z) \\ 26y + 4(3x - 4y + z) \\ 26z - (3x - 4y + z) \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 17x + 12y - 3z \\ 12x + 10y + 4z \\ -3x + 4y + 25z \end{pmatrix}$$

och i matrisform

$$P(\vec{u}) = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -3 \\ 12 & 10 & 4 \\ -3 & 4 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \cdot \vec{u}, \text{ där } \underbrace{A = \begin{bmatrix} 17/26 & 12/26 & -3/26 \\ 12/26 & 10/26 & 4/26 \\ -3/26 & 4/26 & 25/26 \end{bmatrix}}_{\text{oki doki}}$$

… och så vidare ☺

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

6.

Svar: a) $det(A-\lambda \cdot I) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda + 10$

b) $t.ex.\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösningsskiss:

a)

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \left| \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 5 \end{matrix} \right| =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-5) = \ldots = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Alltså sekularpolynomet kan uträknas i en bas bestående av egenvektorer där F:s matris är diagonal med egenvärden på diagonalen.

b) Egenvektorer tillhörande olika egenvärden är för symmetriska avbildningar ortogonala. (notera att $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är ortogonala).
En egenvektor som tillhör λ_3 måste vara ortogonal mot både $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ d.v.s. parallell med vektorprodukten $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Detta ger att $\vec{v}_3$ kan väljas t. ex. som

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{4}(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \ldots = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$