Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Kurskod: 764G01
Provkod: TEN1

Lösnigsskisser

2021-04-23 kl 14-19

scrolla ner på sidan :)

1

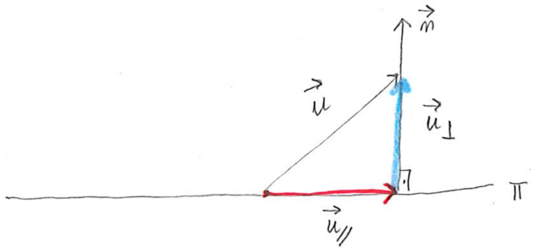
Givet:

1) • Π: $x - 2y + 3z = 5$ där $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) • $\vec{u} = \vec{u}_\perp + \vec{u}_{\parallel}$

3) • $\vec{u}_\perp \perp \Pi \Rightarrow \vec{u}_\perp \parallel \vec{n} \Rightarrow \vec{u}_\perp = k \cdot \vec{n}$ (*)

4) • $\vec{u}_{\parallel} \parallel \Pi \Rightarrow \vec{u}_{\parallel} \circ \vec{n} = 0$



• $\vec{u}_\perp$ är ortogonalprojektionen av $\vec{u}$ på $\vec{n}$, projektionssatsen ger då att

$$\vec{u}_\perp = \frac{\vec{u} \circ \vec{n}}{\vec{n} \circ \vec{n}} \vec{n} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{OBS! se ekvation (*)} \\ \text{alltså } k = \frac{\vec{u} \circ \vec{n}}{\vec{n} \circ \vec{n}} \text{ hos oss} \end{array} \right)$$

• Alltså $\vec{u}_\perp = \dfrac{\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{a - 4 + 3}{1 + 4 + 9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{a-1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

• Då blir $\vec{u} = \vec{u}_\perp + \vec{u}_{\parallel} \Leftrightarrow \vec{u}_{\parallel} = \vec{u} - \vec{u}_\perp$

$$\vec{u}_{\parallel} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \begin{pmatrix} a-1 \\ -2a+2 \\ 3a-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14a - a + 1 \\ 28 + 2a - 2 \\ 14 - 3a + 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13a+1 \\ 26+2a \\ 17-3a \end{pmatrix}$$

kontroll • från (4) vet vi att $\vec{u}_{\parallel} \circ \vec{n} = 0$ alltså

$$\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13a+1 \\ 26+2a \\ 17-3a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \qquad | \cdot 14$$

ger $13a + 1 - 52 - 4a + 51 - 9a = 0$

$0 = 0$ SANT! för alla a värden

• Alltså $\vec{u} = \dfrac{a-1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{14} \begin{pmatrix} 13a+1 \\ 26+2a \\ 17-3a \end{pmatrix}$. För $a = 1$ är $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{u}_{\parallel} = \dfrac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

som medför att $\vec{u} = \vec{u}_{\parallel}$, alltså $\vec{u} \parallel \vec{u}_{\parallel}$.

Svar: $\vec{u}_\perp = \dfrac{a-1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_{\parallel} = \dfrac{1}{14} \begin{pmatrix} 13a+1 \\ 26+2a \\ 17-3a \end{pmatrix}$, där $\vec{u} = \vec{u}_\perp + \vec{u}_{\parallel}$, för $a = 1$ är $\vec{u}$ från början är parallell med planet.

②

$3X + 2B - A^{-1}X = AX \iff 3X - A^{-1}X - AX = -2B \iff$ (OBS! : X befinner sig på "höger" sida av respektive term !!!)

$\iff (3\cdot I - A^{-1} - A)X = -2B$ om $\det(3I - A^{-1} - A) \neq 0$ kommer det finnas $(3I - A^{-1} - A)^{-1}$ och då kan ekvationen skrivas om vidare...

- Då $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ blir $A^{-1} = \frac{1}{0-1\cdot 1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ enligt följande:

om $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\det A \neq 0$, blir $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

OBS! skall alltid hänvisas vid redovisningar om formeln används!

- utan formel $(A|I) \sim \dots \sim (I|A^{-1})$

Alltså $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Då blir $3I - A^{-1} - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

- $\det(3I - A^{-1} - A) = 4 \neq 0 \Rightarrow (3I - A^{-1} - A)^{-1}$ existerar

- Ekvationen kan du skrivas om! vidare

$(3I - A^{-1} - A)X = -2B$ $\quad /\cdot (3I - A^{-1} - A)^{-1}$ på vänster sida av respektive led!

$$\underbrace{(3I - A^{-1} - A)^{-1}\cdot(3I - A^{-1} - A)}_{=I}X = (3I - A^{-1} - A)^{-1}\cdot(-2)\cdot B$$

$$IX = -2(3I - A^{-1} - A)^{-1}\cdot B$$

Alltså $X = -2(3I - A^{-1} - A)^{-1}\cdot B$

för $3I - A^{-1} - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ blir $(3I - A^{-1} - A)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

som ger för $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $X = -2\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \iff X = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

<u>svar</u>: $X = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

③

• sök skärningen l_1 mellan Π och Π_1

$$\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$, den utökade matrisen ger då

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim /ekv2+ekv1/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim /ekv\,2/(-2)/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$\sim /ekv1+ekv2/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$ tag t.ex. $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ då ger rad1) $-y + t = 1 \Leftrightarrow y = -1 + t$

och rad 2 ger $-x - 2t = -2 \Leftrightarrow x = 2 - 2t$ som ger l_1:s ekvation

$$l_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2t \\ -1 + t \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

• sök l_2, skärningen mellan Π och Π_2

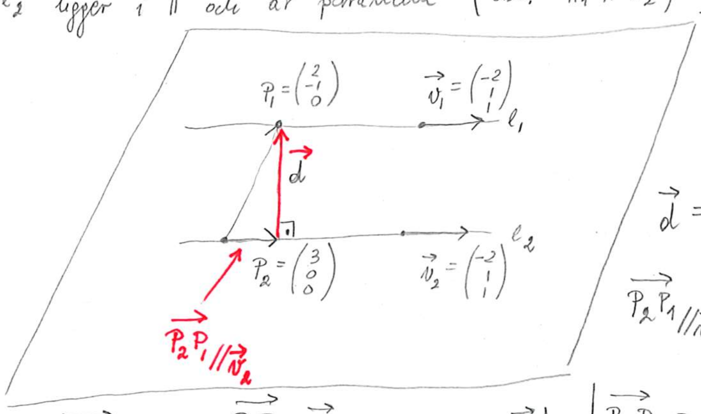
$$\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim /ekv2+ekv1/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim /ekv2/(-2)/ \sim$$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim /ekv1+ekv2/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$ tag, t.ex. $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, då blir $-y + t = 0 \Leftrightarrow y = t$,

$-x - 2t = -3 \Leftrightarrow x = 3 - 2t \Rightarrow$

$$l_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

• Både l_1 och l_2 ligger i Π och är parallella (OBS! $\Pi_1 \parallel \Pi_2$)



, från bilden

$\overrightarrow{P_2P_1}_{/\!/\vec{v}_2} + \vec{d} = \overrightarrow{P_2P_1} \Leftrightarrow$

$\vec{d} = \overrightarrow{P_2P_1} - \overrightarrow{P_2P_1}_{/\!/\vec{v}_2}$ där

$\overrightarrow{P_2P_1}_{/\!/\vec{v}_2}$ är ortogonalprojektion på l_2

Enligt projektionssatsen $\overrightarrow{P_2P_1}_{/\!/\vec{v}_2} = \dfrac{\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2$, $d = |\vec{d}| = \left| \overrightarrow{P_2P_1} - \dfrac{\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 \right|$

Alltså sökta avståndet blir då, $d = \left| \begin{pmatrix} 2-3 \\ -1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{(-1)}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \dfrac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} -6 + 2 \\ -6 - 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \right| =$

$= \dfrac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \dfrac{1}{6} \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2 + (-1)^2} = \dfrac{1}{6} \sqrt{16 + 49 + 1} = \dfrac{1}{6} \sqrt{66} = \sqrt{\dfrac{6 \cdot 11}{6 \cdot 6}} = \sqrt{\dfrac{11}{6}}$

Svar: $d = \sqrt{\dfrac{11}{6}}$ l.e.

4

- Sök skärningslinjen mellan $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$. Den utökade matrisen ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim /ekv\,2 - ekv\,1/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim /ekv\,1 - ekv\,2/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{ger } x_1 - x_3 = 0 \\ \text{ger } x_2 + 2x_3 = 0 \end{array}$$

tag t. ex. $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Skärningslinjens ekvation blir då

$$l: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\vec{f}_1 \parallel l \Rightarrow \vec{f}_1 = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $|\vec{f}_1| = 1$ ger $\underline{\underline{\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

- $\vec{f}_2 \perp (x_1 + x_2 + x_3 = 0) \Rightarrow \vec{f}_2 \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f}_2 = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $|\vec{f}_2| = 1$ ger $\underline{\underline{\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

<u>kontroll</u>: $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2 \Rightarrow \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = 0$

hos oss $\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{18}} (1 - 2 + 1) = 0$, alltså $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$

- $\vec{f}_3 \perp \vec{f}_1$ och $\vec{f}_3 \perp \vec{f}_2$ och $|\vec{f}_3| = 1$

alltså $\vec{f}_3 \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ger då $\vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Den sökta basen är t. ex. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- normalvektorn $= \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\underline{e}}$

Teorin $\cdot$ $\underline{f} = \underline{e} P$ där $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, P är en ON-matris, $P^{-1} = P^t$

Teorin $\cdot$ $X_e = P X_f \iff P^{-1} X_e = X_f \iff P^t X_e = X_f$

- Alltså $\vec{n}_{\underline{f}} = P^t \cdot \vec{n}_e = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - 4 + 3}{\sqrt{6}} \\ \frac{1 + 2 + 3}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1 + 0 + 3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ 6\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ 3\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

<u>svar</u>: $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Koordinaterna för normalvektorn i den nya basen är $\frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

5

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Bestäm A^n.

- Sekularpolynomet $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)+2 =$

$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - \frac{5}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = (\lambda - \frac{5}{2} - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = (\lambda-3)(\lambda-2)$

- Sekularekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ ger då $(\lambda-3)(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \underline{\lambda=3}$ eller $\underline{\lambda=2}$

- Sök respektive egenvektorer mha ekvationen $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

- $\lambda = 3$ ger då den utökade matrisen

$\left(\begin{array}{cc|c} 1-3 & -2 & 0 \\ 1 & 4-3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ ger $x_1 = -x_2$, tag t. ex. $x_2 = t$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $t \in \mathbb{R}$ och $t \neq 0$

- $\lambda = 2$ ger då på motsvarande sätt

$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2 & -2 & 0 \\ 1 & 4-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$ ger $x_1 = -2x_2$, tag, t.ex. $x_2 = t$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $A = PDP^{-1}$ där $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{-1+2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

OBS!
om $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\det C \neq 0$,
ges $C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
måste hänvisas till om används!

Alternativt $(P|I) \sim \ldots \sim (I|P^{-1})$
om $\det P \neq 0$

- $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -3^n & -2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3^n + 2^{n+1} & -2\cdot 3^n + 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n & 2\cdot 3^n - 2^n \end{bmatrix}$

b) Bestäm X sådan att $X^2 = A$

$X = A^{1/2} = \left| n = \frac{1}{2} \right| = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} + 2\sqrt{2} & -2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} & 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\underline{\text{Svar:}}$ $A^n = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2\cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2\cdot 3^n - 2^n \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} - \sqrt{3} & 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} & 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \end{bmatrix}$

6

a)

om $\vec{u}$ är rotationsaxeln så gäller att $R \cdot \vec{u} = \vec{u}$, låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Big| \cdot 3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x - 3x - 2y + z \\ 2x + y - 3y - 2z \\ x + 2y + 2z - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \Big/ \begin{matrix} \text{ekv } 2 + 2\text{ekv } 1 \\ \text{ekv } 3 + \text{ekv } 1 \end{matrix} \Big/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \Big/ \text{ekv } 2/(-3) \Big/ \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \Big/ \begin{matrix} \text{ekv } 1 + \text{ekv } 2 \\ \text{därefter ekv}2/2 \end{matrix} \Big/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \text{ger } x = z \\ \text{ger } y = 0 \end{matrix}$$

, tag t. ex. $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ och $t \neq 0$

rotationsaxeln ges då av $\vec{u} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ och $t \neq 0$

b) Betrakta nu en godtycklig vektor i rotationsplanet $x + z = 0$ (det plan som är ortogonal mot rotationsaxeln och som innehåller origo), t. ex. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Genom att rotera den får vi en vektor $F(\vec{v}) = R\vec{v}$, alltså

$$F(\vec{v}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rotationsvinkeln blir då lika med vinkeln mellan $\vec{v}$ och $F(\vec{v})$ och den fås ur formeln:

$$\vec{v} \circ F(\vec{v}) = |\vec{v}||F(\vec{v})| \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{v} \circ F(\vec{v})}{|\vec{v}|\,|F(\vec{v})|}$$

Alltså

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

(Observera att både $\vec{v}$ och $F(\vec{v})$ har längden 1, avbildningen F är ju en rotation som är alltså isometri, behåller längden).

Ekvation $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ ger att $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ vilket är ungefär 70°.

(OBS! ingen ekvivalens gäller här!!!)

Svar: a) Rotationsaxeln ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Rotationsvinkeln är $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$