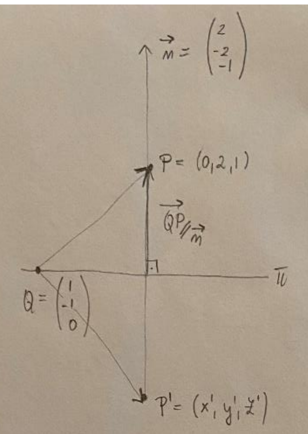
Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Lösningsskisser, facit, kommentarer

2022-03-24

① a)



$\vec{QP'} + 2\vec{QP}_{/\!/\vec{n}} = \vec{QP}$ ger $\vec{QP'} = \vec{QP} - 2\vec{QP}_{/\!/\vec{n}}$

och vidare $\vec{QP'} = \vec{OP'} - \vec{OQ}$,

$\vec{OP'} - \vec{OQ} = \vec{QP} - 2\vec{QP}_{/\!/\vec{n}}$ som ger P' koordinater enligt

$$\boxed{\vec{OP'} = \vec{QP} - 2\vec{QP}_{/\!/\vec{n}} + \vec{OQ}}$$

Projektionsformeln ger då $\vec{QP}_{/\!/\vec{n}} = \dfrac{\vec{QP} \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}}\vec{n} \quad \left(= \dfrac{\vec{QP} \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} \right)$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} - 2\,\frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-0 \\ -1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{(-9)}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Svar: Spegelbilden av punkten $P = (0,2,1)$ i planet $2x - 2y - z = 4$ är punkten med koordinaterna $(4, -2, -1)$.

① b)

Linjens ekvation är $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ alltså $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2t \\ 2 - 2t \\ 1 - t \end{pmatrix}$.

Vi söker skärningspunktens koordinater för given ovan linjen och planet $2x - 2y - z = 4$. Alltså vi löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = 2t & 1) \\ y = 2 - 2t & 2) \\ z = 1 - t & 3) \\ 2x - 2y - z = 4 & 4) \end{cases}$$

Insättning av 1), 2), 3) i ekv 4) ger

$$2 \cdot 2t - 2(2-2t) - (1-t) = 4 \iff 4t - 4 + 4t - 1 + t = 4 \iff 9t = 9 \iff$$

För $t = 1$ fås punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 - 2 \cdot 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Svar: Sökta punktens koordinater är $(2, 0, 0)$.

OBS! Du kan alltid kontrollera om punktens koordinater uppfyller planets ekvation.

(OBS! ej lösning utan kommentarer till lösningen)

② a) Matrisen är inverterbar om och endast om dess determinant är nollskild.
Determinanten är

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & 0 & a \end{bmatrix} = a^2 - a = a(a-1)$$

som är skilt från noll för alla värden på a utom 0 och 1.

<u>svar</u>: $a \neq 0$ och $a \neq 1$

② b) Ekvationssystemet har en unik lösning om och endast om koefficientmatrisen är inverterbar, vilket är fallet utom $a=0$ eller $a=1$.
Om $a=0$ blir den nedersta ekvationen $0=1$, så systemet saknar lösningar i detta fall.
Om $a=1$ har systemet totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

och lösningarna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

<u>svar</u>: Systemet har oändligt många lösningar precis då $a=1$.
Dessa lösningar är $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

OBS! Inga fullständiga lösningar.

3

a) Elimination i systemets totalmatris ger (exempelvis)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -28 \end{array}\right).$$

Nedersta raden motsvarar $0=-28$, så systemet saknar lösning.

Svar: se ovan

b) Normalekvationen blir

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$ vars enda lösning är $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Svar: $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

c) Deluppgift b) visar att närmaste punkten har parametrarna $s=4$, $t=-1/2$, så den är $4(1,1,1)-\frac{1}{2}(4,2,-2) = (2,3,5)$.

Svar: $(2,3,5)$

Uppgift 4: utgå alltid från definitionen och inget annat. Då kan så klart hänvisa till geometriska tolkningar i dimnension 2 och dimension 3 vid vidare redovisning i respektive dimension.

4

<u>svar</u>: Linjärt beroende. T. ex. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

5

<u>svar</u>: • $\lambda = 3$ (dubbelrot) med tillhörande egen vektor

$\vec{v} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ där ($t \neq 0$ eller $s \neq 0$) <u>och</u> $s, t \in \mathbb{R}$

• och $\lambda = -6$ med tillhörande egen vektor $\vec{u} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ där $r \in \mathbb{R}$ <u>och</u> $r \neq 0$

6

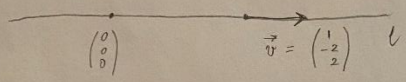
a) <u>svar</u>: t.ex. $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$

b) <u>svar</u>: (mha $A_e = PA_fP^{-1}$)

$$A_e = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ där } P = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{bmatrix}$$

<u>OBS!</u> Saknar du utförliga lösningar? Utgå från förelänings- och lektionsanteckningar och lösningarna och tips på kursenshemsida för liknande uppgifter.

Tips: 6a)



• tag $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $F(\vec{u}) = \vec{u} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{egenvärde}}}{1}\cdot \vec{u}$ ← egenvektor

<u>OBS!</u> Du kan normera vektorerna på slutet!

• tag $\vec{v}$ som är ortogonal mot $\vec{u}$, alltså $\vec{v}\bullet\vec{u} = 0$

(OBS: det finns oändligt sådana vektorer! tag bara en!)

t. ex. $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, då $F(\vec{v}) = \vec{0} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{egenvärde}}}{0}\cdot\vec{v}$ ← egenvektor

• tag $\vec{w} \parallel \vec{u}\times\vec{v}$, då blir $\vec{w}\bullet(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$

och $F(\vec{w}) = \vec{0} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{egenvärde}}}{0}\cdot\vec{w}$ ← egenvektor

då ges $\vec{w} = \begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$ t. ex., <u>normera vektorerna</u>, $\vec{f}_1 \parallel \vec{u}$, $\vec{f}_2 \parallel \vec{v}$, $\vec{f}_3 \parallel \vec{w}$

tag $\vec{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{f}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$

<u>Svar</u>: a) <u>t. ex.</u> $\vec{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{f}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$

Tips: 66)

b)

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

om $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$$A_e = P A_f P^{-1} = \left[\begin{array}{c} P \text{ är ortogonal} \\ \text{matris, då} \\ \text{blir } P^{-1} = P^t \end{array} \right] = P A_f P^t = \text{insättning av respektive} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

svar: $A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_e = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Du kan göra kontroll:} \\ F(\vec{u}) = A_e \cdot \vec{u} = \vec{u} \\ F(\vec{v}) = A_e \cdot \vec{v} = \vec{0} \\ F(\vec{w}) = A_e \cdot \vec{w} = \vec{0} \end{array}}$$