Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Lösningsskisser/facit

2022-04-22

1.

Svar a):

Definition

Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ vara en uppsättning vektorer i $\Re^n$. Vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ sägs vara linjärt oberoende om $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$ endast gäller om $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Lösningsskiss b):

Vi ska undersöka om det finns någon icke-trivial linjärkombination av vektorerna som är lika med nollvektorn.

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Detta system har den utökade matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Gausselimination ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} kommentar \\ r2 - 2\cdot r1 \\ r3 - 3\cdot r1 \\ r4 - 4\cdot r1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} kommentar \\ r2 \text{ och } r3/(-2) \\ byter \text{ plats} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} kommentar \\ r1-r2 \\ r3+r2 \\ r4+3\cdot r2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} kommentar \\ \\ \\ r4+r3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_3 = 0 \\ \end{array}$$

Vi ser att systemet har bara trivial lösning $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Alltså finns inga icke-triviala linjärkombinationer som uttrycker nollvektorn och vektorerna är linjärt oberoende.

Svar b): Vektorerna är linjärt oberoende.

2.

$$X_{a\times b}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

- Produkten i VL är definierad om $b = 2$
- Om produkten ska ger matris av typ 2×3 så måste $a = 2$
- Alltså matrisen X finns och $X_{2\times 2} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$

Insättning i ekvationen ger

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1-x_2 & 2x_1 & 3x_1-x_2 \\ x_3-x_4 & 2x_3 & 3x_3-x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Identifiering av respektive ger:

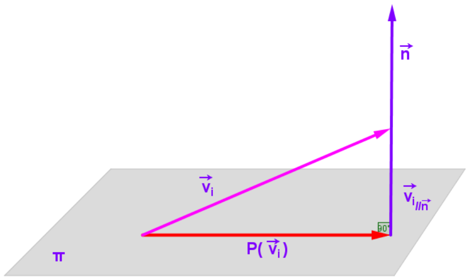
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ 2x_1 = 2 \\ 3x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_3 = 4 \\ 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_3 = 2 \\ 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases} \quad \textit{insättning av}$$

$$x_1 = 1 \quad och \quad x_3 = 2 \quad ger \quad \begin{cases} 1 - x_2 = -3 \\ x_1 = 1 \\ 3 - x_2 = -1 \\ 2 - x_4 = -1 \\ x_3 = 2 \\ 6 - x_4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Svar : $X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. Kort lösningsskiss:

Den sökta vinkeln α är naturligtvis lika med vinkeln mellan de ortogonala projektionerna $P(\vec{v}_1)$ samt $P(\vec{v}_2)$ av linjernas riktningsvektorer $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ på det givna planet. Vi behöver inte beräkna projicerade linjer, ännu mindre deras skärningspunkt! En normal till planet är $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ medan $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ samt $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vidare, enligt figuren och projektionssatsformeln



$$P(\vec{v}_i) + \vec{v}_{i_{//\vec{n}}} = \vec{v}_i \Leftrightarrow P(\vec{v}_i) = \vec{v}_i - \vec{v}_{i_{//\vec{n}}} = \vec{v}_i - \frac{\vec{v}_i \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}}\vec{n}$$

$i = 1,2$

Då blir

$$P(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 - \vec{v}_{1_{//\vec{n}}} = \vec{v}_1 - \frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}}\vec{n} = [övning] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 - \vec{v}_{2_{//\vec{n}}} = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}}\vec{n} = [övning] = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den sökta vinkeln ges av $P(\vec{v}_1) \bullet P(\vec{v}_2) = |P(\vec{v}_1)||P(\vec{v}_2)| \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{P(\vec{v}_1) \bullet P(\vec{v}_2)}{|P(\vec{v}_1)||P(\vec{v}_2)|} = [övning] = \dfrac{1}{2}$

En av lösningarna till ekvationen $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ är $\alpha = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$. (Obs: vi söker den minsta vinkeln)

Svar: $\alpha = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$.

4.

Svar a): Att $\vec{u} \neq \vec{0}$ och $F(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

Kort lösningsskiss b):

(obs: bland annat så är linearitetsegenskaperna av stort intresse för lösningen av denna uppgift, du måste så klart hänvisa till linearitetsegenskaperna i din lösning)

Den linjära avbildningen F på rummet uppfyller

$$\begin{array}{l} ekv.1 \\ ekv2. \\ ekv3. \end{array}\begin{cases} F(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) & = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) & = -3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ F(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) & = -5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \end{cases}$$ och med hjälp av

linearitetsegenskaperna ska du visa om $F(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, $F(\vec{v}) = \beta\vec{v}$ och om $F(\vec{w}) = \alpha\vec{w}$.

Vidare om likheterna gäller så ska man i förekommande fall ange motsvarande egenvärden.

Vi ska alltså titta på om $F(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \lambda(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, $F(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = \beta(\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$ och om $F\left(-\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3\right) = \alpha\left(-\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3\right)$.

Med hjälp av linearitetsegenskaperna kan du söka $F(\vec{e}_1), F(\vec{e}_2)$ och $F(\vec{e}_3)$. T.ex.

$$\begin{array}{llll} ekv.1 & och & ekv.2 & ger \quad F(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ ekv.1 & och & ekv.2 & ger \quad F(\vec{e}_2) = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ ekv.2 & och & ekv.3 & ger \quad F(\vec{e}_3) = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{array}$$

Vidare

$$F(\vec{u}) = F(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = [\text{linearitetsegenskaperna}] = -2F(\vec{e}_1) + F(\vec{e}_2) + F(\vec{e}_3) = -2(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) +$$
$$+ (-2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) + (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_1) + (-2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_2) + (2\vec{e}_3 - \vec{e}_3) =$$
$$= -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 1 \cdot (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 1 \cdot \vec{u}$$

Alltså $F(\vec{u}) = 1 \cdot \vec{u}$.

$$F(\vec{v}) = F(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = [\text{linearitetsegenskaperna}] = F(\vec{e}_1) + F(\vec{e}_3) = (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) + (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) =$$
$$= (-\vec{e}_1 - 2\vec{e}_1) + (\vec{e}_2 + \vec{e}_2) - \vec{e}_3 = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \neq \beta \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$$

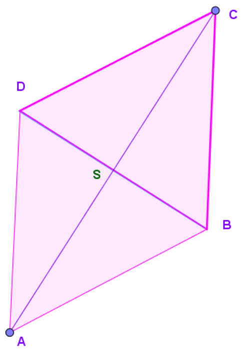
Alltså $F(\vec{v}) \neq \beta \cdot \vec{v}$.

$$F(\vec{w}) = F\left(-\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3\right) = [\text{linearitetsegenskaperna}] = -F(\vec{e}_1) + \frac{1}{2}F(\vec{e}_2) - \frac{1}{2}F(\vec{e}_3) = -(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) +$$
$$+ \frac{1}{2}(-2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) - \frac{1}{2}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (\vec{e}_1 - \vec{e}_1 + \vec{e}_1) + \left(-\vec{e}_2 + \vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_2\right) + \left(\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_3\right) =$$
$$= \vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3 = -1 \cdot \left(-\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3\right) = -1 \cdot \vec{w}$$

Alltså $F(\vec{w}) = -1 \cdot \vec{w}$.

Svar: Vektor $\vec{u} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ är egenvektor med egenvärde 1. Vektor $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ är inte egenvektor till F . Vektor $\vec{w} = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3$ är egenvektor med egenvärde -1.

5. Lösningsskiss:



Om diagonalerna i en romb alltid är ortogonala, då räcker det att visa att $\overrightarrow{SC} \bullet \overrightarrow{SB} = 0$.

$\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$. Vi ska nu uttrycka respektive $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{DB}$

Med hjälp av vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AD}$ som spänner upp romben.

Vi vet att $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$ och att $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ och $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Alltså

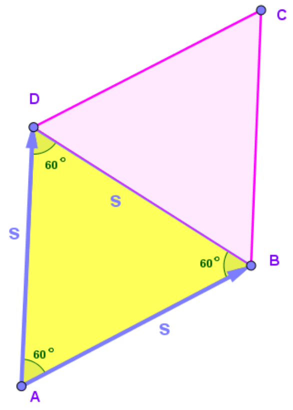
$$\overrightarrow{SC} \bullet \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \bullet \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{DB} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}\right) = \left[\begin{array}{c} \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right| \cos 0^\circ = \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \\ ty \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} - \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AD}\right) = 0$$

Detta medför att diagonalerna i en romb alltid är ortogonala.

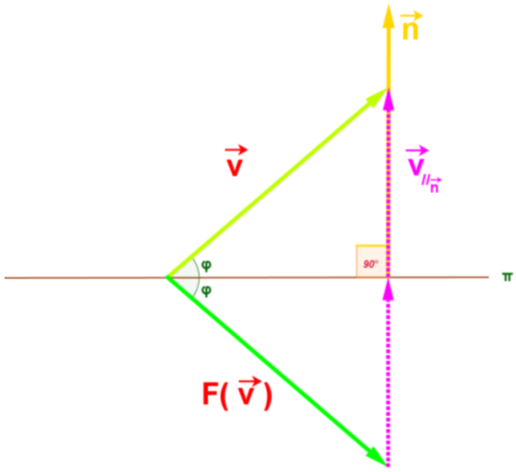
Vi ska nu beräkna arean av en romb med sidlängd *s*, om även en av diagonalerna har längd *s*. Figuren visar att rombens area är summan av areorna för två liksidiga trianglar. Detta ger oss vinkeln 60° mellan vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AD}$ som spänner upp romben.



$$Area = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right| \sin 60^\circ = \left[\begin{array}{c} kommentar \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = s \end{array}\right] = s \cdot s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} s^2$$

Svar: Den sökta arean är $\frac{\sqrt{3}}{2} s^2$ *a.e.*

6. Lösningsskiss: (Obs : utgå alltid från en figur med tydliga beteckningar, alltså lär dig inte utantill vilka samband som gäller, alla sådana samband utan figur ger inga poäng)



Givet:

1. $F(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ alltså $F\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ där F är en spegling
2. med hjälp av given figuren får vi : $F(\vec{v}) + 2\vec{v}_{//\vec{n}} = \vec{v}$

Sökes:

1. F :s matris A
2. $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

Lösningsskiss: (obs: en av många lösningsalternativ så t.ex.)

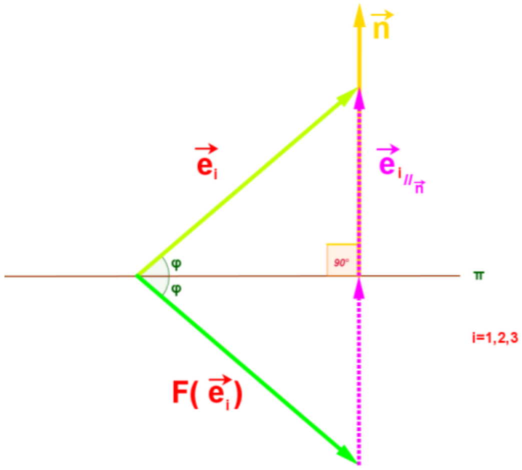
$F(\vec{v}) + 2\vec{v}_{//\vec{n}} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}_{//\vec{n}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{v} - F(\vec{v})\right)$ ger vektor som är parallell med planets normalvektor.

Insättningen av respektive $F(\vec{v})$ och $\vec{v}$ ger $\vec{v}_{//\vec{n}} = \dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, som ger

speglingsplanets ekvation (hur vet man det? komplettera tankegången här) $\pi : \quad x - y + z = 0$.

(obs: en av många lösningsalternativ här med t.ex. om vi utgår från figuren nedan)

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska



$F(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_{1//\vec{n}}$ och projektionssatsen $\vec{e}_{1//\vec{n}} = \dfrac{\vec{e}_1 \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}}\vec{n} \quad \Rightarrow F(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - 2 \cdot \dfrac{\vec{e}_1 \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}}\vec{n}$

På motsvarande sätt blir

$F(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 - 2 \cdot \dfrac{\vec{e}_2 \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}}\vec{n}$ och $F(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 - 2 \cdot \dfrac{\vec{e}_3 \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}}\vec{n}$

Dina beräkningar ska ger vidare : $F(\vec{e}_1) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $F(\vec{e}_2) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $F(\vec{e}_2) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \frac{1}{3}\left[F(\vec{e}_1) \quad F(\vec{e}_2) \quad F(\vec{e}_3)\right] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Svar: $A = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$