Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Lösningsskisser/facit
2022-08-22

1. Svar: Det sökta avståndet är lika med $\sqrt{14}$ l.e. (du hittar lösning på sid.72 i kurslitteraturen, exempel 1.52)

2. Svar: $A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. Kontrollen ingår i lösningen.

3. Kort lösningsskiss:

$det(A(x))=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & x+1 \\ x+1 & 2 & 3-x \end{vmatrix}=\ldots=4$ som inte beror av x. Vi vet att $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$. Vi räknar

(t.ex.) ut produkten: $A^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & x+1 \\ x+1 & 2 & 3-x \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8-2x & 0 & 4(x-3) \\ 5(x-3) & 2 & 9(3-x) \\ 3-x & 0 & 2(x-2) \end{bmatrix}$.

Ekvationen $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8-2x & 0 & 4(x-3) \\ 5(x-3) & 2 & 9(3-x) \\ 3-x & 0 & 2(x-2) \end{bmatrix}=I \Rightarrow [identifiera] \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(8-2x)=1 \\ \frac{1}{2}(4(x-3))=0 \\ \frac{1}{2}(5(x-3))=0 \\ \frac{1}{2}(9(3-x))=0 \\ \frac{1}{2}(3-x)=0 \\ \frac{1}{2}(2(x-2))=1 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=3$.

Svar: $det\,A=det(A(x))=4$, alltså är oberoende av x. Inversen till A är lika med

$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ då $x=3$.

4.

Lösningsskiss a):

Sekularpolynomet är:

$$det(A-\lambda\cdot I)=\lambda(3-\lambda)(\lambda-1)$$

Sekularekvationen är:

$$det(A-\lambda\cdot I)=0 \Leftrightarrow \lambda(3-\lambda)(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ eller } (3-\lambda)=0 \text{ eller } (\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ eller } \lambda=3 \text{ eller } \lambda=1$$

Vi ska visa nu att $sp(A)=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n$.

$$VL=sp(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}=1+2+1=4$$

$$HL=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\begin{bmatrix} tag \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=1 \\ \lambda_3=3 \end{bmatrix}=0+1+3=4$$

Alltså $VL=HL=4 \Rightarrow sp(A)=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n$.

Svar a): Ser ovan.

Svar b): $\lambda=0$ ger egenvektor $t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ där $t\in\Re$ och $t\neq 0$

$\lambda=1$ ger egenvektor $t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ där $t\in\Re$ och $t\neq 0$

$\lambda=3$ ger egenvektor $t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ där $t\in\Re$ och $t\neq 0$

5. Svar: $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{27}{5}x+\frac{7}{2}$ (lösningsskiss på kursens hemsida i "Tips med mera" uppgift 5.30 problemsamling).

6. Svar: $6x^2+4xy+3y^2=1$ är ekvationen för en ellips med halvaxlarna $\frac{1}{\sqrt{7}}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Storaxeln ligger i riktningen $\vec{f}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ och lillaxeln ligger i riktningen $\vec{f}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, (för lösningsskiss ser föreläsningsanteckningar).