Linköpings universitet
Matematiska institutionen
malgorzata wesolowska

Utbildningskod: 764G01
Modul: TEN1

Facit
2023-04-21

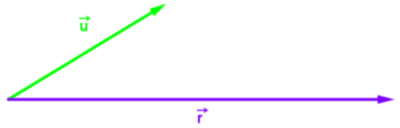
1. Standardberäkningar ger att $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ så $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow$

$$X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

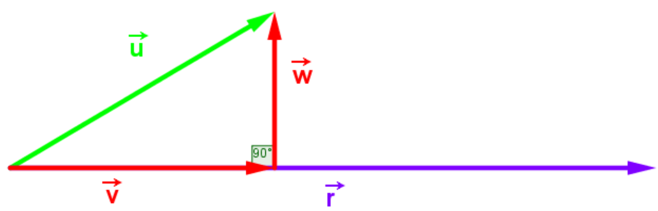
Svar: $X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

2. (Obs: rita alltid figur med tydliga beteckningar)

- Vi har två icke paralella vektorer (rita)



- Rita nu övriga vektorer som uppfyller villkoren, markera vinkeln för vektorer som är ortogonala!



- Nu kan du tydligt ser vad du ska räkna på och varför 😊

Projektionsformeln ger att $\vec{v} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{r}}{\vec{r} \bullet \vec{r}}\vec{r} \Rightarrow \vec{v} = -\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} \Rightarrow \vec{w} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 19 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$. Till sist

$\vec{x} \,//\, \vec{u} \times \vec{r}$ vi kan t.ex. välja $\vec{x} = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 23 \end{pmatrix}$. Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Svar: $\vec{v} = -\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 19 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$ och t.ex. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 23 \end{pmatrix}$.

3. Gausseliminationen ger egenvektorerna $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $r \neq 0$, $s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $s \neq 0$ och $t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $t \neq 0$ med egenvärdena 2, -1 resp. 1. Sätt $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Då är $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ en bas för rummet enligt sats ty vektorerna är egenvektorer hörande till 3 olika egenvärden.
Basvektorernas bilder blir då $F(\vec{f}_1) = 2\vec{f}_1$, $F(\vec{f}_2) = -\vec{f}_2$ och $F(\vec{f}_3) = \vec{f}_3$ så i basen $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ får F matrisen $A_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Svar: $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $A_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. För att L ska bli vinkelrät mot planet $\Pi: x + y - 2z = 2$ måste en normalvektor $\vec{n}$ till detta plan vara en riktningsvektor till L. Om man väljer $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ så blir L : s ekvation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

där $t \in \Re$. Då L är vinkelrät mot planet följer (RITA!) att det sökta avståndet d ges av $d = |\overrightarrow{PQ}|$ där Q är L :s skärningspunkt med planet. Då är $\overrightarrow{PQ} = t \cdot \vec{n}$ och vi kan hitta t genom att sätta respektive koordinater för L i planets ekvation vilket ger

$$(2+t) + (-3+t) - 2(1-2t) = 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t = \frac{5}{6}.$$

Sökta avståndet d blir alltså $d = |\overrightarrow{PQ}| = \left| \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{5\sqrt{6}}{6}$.

Svar: L har ekvationen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ där $t \in \Re$. Sökta avståndet är $d = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ l.e.

5. Vektorn $\vec{n} = \vec{u} - F(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ måste (Obs: RITA!) vara normal till sökta planet Π. Eftersom origo ligger i Π blir Π:s ekvation $x+2y\text{-}z=0$ och vi ser att $F(\vec{u})$ verkligen är en vektor i detta plan, vilket är ett måste om F ska kunna vara ortogonalprojektionen.

Enligt projektionsformeln ges $\vec{e}_1 : s$ ortogonalprojektion på $\vec{n}$ av $\vec{v} = \frac{\vec{e}_1 \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}} \vec{n} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. I en omsorgsfullt ritad figur ses att $F(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{v} \Rightarrow F(\vec{e}_1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. På motsvarande sätt fås att

$F(\vec{e}_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $F(\vec{e}_3) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Sökta avbildningsmatrisen blir alltså $A = [F(\vec{e}_1) \quad F(\vec{e}_2) \quad F(\vec{e}_3)] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Svar: $A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

6. Börja med att rita! Sätter du korrekta samband så kommer de leda till följande: (Obs: vektorerna som spänner upp triangel ABC är linjärt oberoende)

$\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{5}\vec{u} + \frac{1}{5}\vec{v}$ och $\overrightarrow{BF} = -\frac{8}{25}\vec{u} + \frac{4}{25}\vec{v}$

Arean av triangel BEF ges av $A_{\Delta BEF} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BE} \times \overrightarrow{BF}\right| = \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{125} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|$ och arean av triangel ABC ges av $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|$ alltså $A_{\Delta BEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{125} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{4}{125} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|\right) = \frac{4}{125} \cdot (A_{\Delta ABC})$.

Så arean av triangel BEF upptar alltid samma andel av arean av triangel ABC och andelen är $\frac{4}{125}$.

Svar: $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{5}\vec{u} + \frac{1}{5}\vec{v}$ och $\overrightarrow{BF} = -\frac{8}{25}\vec{u} + \frac{4}{25}\vec{v}$.

$A_{\Delta BEF} = \frac{4}{125} \cdot (A_{\Delta ABC})$, andelen är $\frac{4}{125}$.